Exercice 1

1) Dans la formule de Simpson, on utilise la valeur de la fonction aux deux extrémités ainsi que la valeur au point milieu. (1pt)
Il faut donc utiliser des sous-intervalles de 2 s.

2)

$$I_1 = \int_0^2 v(t)\,dt \simeq \frac{1}{3}\left(v(0) + 4v(1) + v(2)\right)$$

$$I_2 = \int_2^4 v(t)\,dt \simeq \frac{1}{3}\left(v(2) + 4v(3) + v(4)\right)$$

$$I_3 = \int_4^6 v(t)\,dt \simeq \frac{1}{3}\left(v(4) + 4v(5) + v(6)\right)$$

(1pt)

$$I_4 = \int_6^8 v(t)\,dt \simeq \frac{1}{3}\left(v(6) + 4v(7) + v(8)\right)$$

$$I_5 = \int_8^{10} v(t)\,dt \simeq \frac{1}{3}\left(v(8) + 4v(9) + v(10)\right)$$

3) En sommant les cinq équations précédentes, on obtient (2pts)

$$I \simeq \frac{1}{3}\left(v(0) + v(10)\right) + \frac{2}{3}\left(v(2) + v(4) + v(6) + v(8)\right) + \frac{4}{3}\left(v(1) + v(3) + v(5) + v(7) + v(9)\right).$$

4) L'application numérique donne $\underline{I = u(10\text{ s}) \simeq 177{,}62\text{ m}}$ (1pt)

5) On obtient la formule du trapèze : (1pt)

$$\left(\frac{b-a}{6}\right)\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \left(\frac{b-a}{6}\right)\left(f(a) + 4\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(f(a) + f(b)\right)$$

Exercice 2

1) $U(t) = U_0 e^{-at}$

Il faut effectuer une transformation logarithmique :

$$\underbrace{\ln(U(t))}_{y} = \underbrace{\ln(U_0)}_{b} - at$$

(1pt)

2) $Q = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$, $s = \begin{bmatrix} 4{,}6052 \\ 2{,}9957 \end{bmatrix}$ et $p = \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$

(2pts)

$$Qp = s \Rightarrow \begin{cases} b = 2{,}3249 \Rightarrow \underline{U_0 = e^b = 10{,}22} \\ -a = -0{,}78 \end{cases}$$

3) On cherche le temps $t_{x\%}$ associé à X% de la valeur initiale :

$U_0 e^{-at_{x\%}} = X U_0 . \Rightarrow -at_{x\%} = \ln(X)$

(1pt)

$$\boxed{t_{x\%} = \frac{\ln(X)}{-a}}$$

Pour $X = 0{,}05$, on obtient $\underline{t = 3{,}84\,s}$

4) $a.t_{5\%} = 3 \Rightarrow t_{5\%} = \frac{3}{a} = 3\tau$ avec τ constante de temps du système

(1pt)

Exercice 3

1) la position y est l'inconnue et sa variable est la variable temporelle t (1pt)

2) $\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \overset{AN}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -400 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$

(2pts)

d'où $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X^0 \end{cases}$

3) La méthode d'Euler explicite s'écrit

$X^{n+1} = X^n + \delta t \, A X^n$

$X^{n+1} = (I + \delta t A) X^n$

$I + \delta t A = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-2} \\ -4 & 0,9 \end{bmatrix}$

(2pts)

$X^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad X^2 = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -7,60 \end{bmatrix} \quad X^3 = \begin{bmatrix} 0,88 \\ -10,68 \end{bmatrix}$