ESTACA | Outils numériques pour la modélisation | 27/10/16

3A | Examen

Questions de cours (4 points)

Chaque question a au moins une bonne réponse. Une question entièrement juste est comptée positivement et une question fausse négativement. Merci de répondre directement sur le sujet en noircissant la(les) bonne(s) réponse(s).

1. Lorsqu'une matrice est inversible, le pivotage dans la méthode de Gauss
   - ■ est toujours possible
   - □ est parfois impossible
   - ■ consiste à changer le pivot si celui-ci est nul
   - □ consiste à transposer la matrice
2. Soit un nuage de n points ($n \geq 2$), la droite de régression
   - □ passe obligatoirement par aucun point
   - □ passe obligatoirement par deux points
   - □ passe obligatoirement par tous les points
   - ■ minimise la somme des carrés des distances entre la droite et les points
3. La régression linéaire est de mauvaise qualité si le coefficient de corrélation linéaire est
   - □ proche de -1
   - ■ proche de 0
   - □ proche de 1
   - □ le plus grand possible
4. Une formule d'intégration composite permet
   - ■ d'approcher le calcul d'une intégrale
   - ■ d'estimer l'aire sous une courbe
   - □ d'approcher un opérateur différentiel
   - □ de trouver la droite de regression
5. Une méthode de résolution d'une EDP doit être
   - ■ convergente
   - □ divergente
   - ■ stable
   - □ non-linéaire
6. Quel opérateur approche la dérivée seconde de la fonction f en x ?
   - □ $(f(x-h) + 2f(x) + f(x+h))/h$
   - □ $(f(x-h) - 2f(x) + f(x+h))/h$
   - □ $(f(x-h) + 2f(x) + f(x+h))/h^2$
   - ■ $(f(x-h) - 2f(x) + f(x+h))/h^2$
7. Quel opérateur approche le laplacien 2D de la fonction f en (x, y) ?
   - □ $(f(x-h,y) + f(x,y-h) + 4f(x,y) + f(x+h,y) + f(x,y+h))/h$
   - □ $(f(x-h,y) + f(x,y-h) - 4f(x,y) + f(x+h,y) + f(x,y+h))/h$
   - □ $(f(x-h,y) + f(x,y-h) + 4f(x,y) + f(x+h,y) + f(x,y+h))/h^2$
   - ■ $(f(x-h,y) + f(x,y-h) - 4f(x,y) + f(x+h,y) + f(x,y+h))/h^2$

8. Quelle EDP est instationnaire et linéaire ?

- ■ $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$
- □ $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$
- □ $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$
- □ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \dfrac{\partial u}{\partial x} + \gamma u = 0$

Exercice 1 (5pts)

1
$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1pt)

2

$$\underbrace{\quad\quad A^{(2)} \quad\quad}\ \underbrace{b^{(2)}}$$

3	3	1	0
0 $4-4\frac{3}{3}$	0 $4-4\frac{3}{3}$	$-\frac{7}{3}$ $-1-4\frac{1}{3}$	2 $2-4\frac{0}{3}$
0 $0-0\frac{3}{3}$	1 $1-0$	4 $4-0$	1 $1-0$

(2pts)

3 Non, car le pivot de la 2ème ligne est nul. On peut permuter les 2 dernières lignes

(1pt)

4
$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -7/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$z = -\frac{6}{7}$

$y = \frac{24}{7} + \frac{7}{7} = \frac{31}{7}$

$x = \left(-\frac{93}{7} + \frac{6}{7}\right)\frac{1}{3} = \frac{-87}{21} = \frac{-29}{7}$

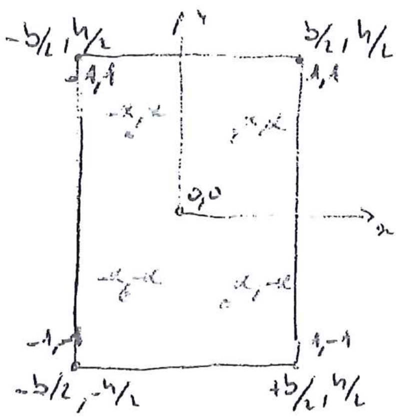
(1pt)

Exercice 2 (6pts)

1 $I_x = \int_S y^2 dS = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} y^2 \, dy \, dx = \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{1}{3} y^3\right]_{-h/2}^{h/2} dx = \frac{h^3}{12}\int_{-b/2}^{b/2} dx = \frac{h^3}{12}\left[x\right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{bh^3}{12}$

(1pt)

2



avec $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(1pt)

3 Dans la formule 1D du trapèze, le poids est $\frac{b-a}{2}$

sur $x \rightarrow \frac{b/2-(-b/2)}{2} = \frac{b}{2}$

sur $y \rightarrow \frac{h/2-(-h/2)}{2} = \frac{h}{2}$

donc en 2D nous aurons $\frac{bh}{4}$

(2pts)

4 - formule de quadrature 2D

$$I = \sum_i \sum_j \omega_{ij}\, f(x_i, y_j)$$

Pour le rectangle

$$I = \omega_{11} f(x_1,y_1) + \omega_{12} f(x_1,y_2) + \omega_{21} f(x_2,y_1) + \omega_{22} f(x_2,y_2)$$

On applique $\omega_{ij} = \frac{bh}{4}$ et $f(x_i, y_i) = y_i^2$ 2pts

Methode trapèze

$$I_T = \frac{bh}{4}\left(\frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{4}\right) = \frac{bh^3}{4}$$ avec $y_i = \pm \frac{h}{2}$

Methode Gauss

$$I_G = \frac{bh}{4}\left(\frac{h^2}{4.3} + \frac{h^2}{4.3} + \frac{h^2}{4.3} + \frac{h^2}{4.3}\right) = \frac{bh^3}{12}$$ avec $y_i = \frac{h}{2\sqrt{3}}$

5 - La méthode de Gauss à 2 points induit une approximation polynomiale d'ordre 3. Comme la fonction est d'ordre 2 on tombe alors sur la solution exacte. 1pt

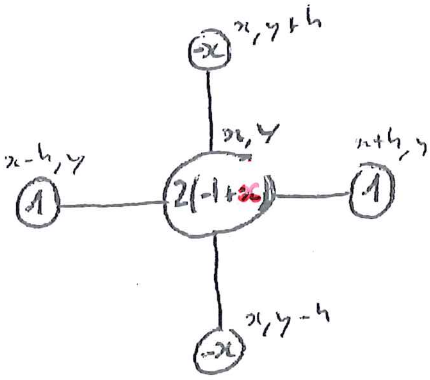
Exercice 3 (5pts)

1 $D_h^{(1)} = \dfrac{\phi(x-h) - 2\phi(x) + \phi(x+h)}{h^2}$ (1pt)

2 $$\frac{\phi(x-h,y) - 2\phi(x,y) + \phi(x+h,y)}{h^2} - x\left(\frac{\phi(x,y-h) - 2\phi(x,y) + \phi(x,y+h)}{h^2}\right) = 0$$

$$\frac{-x\,\phi(x,y-h) + \phi(x-h,y) + 2(-1+x)\,\phi(x,y) - x\,\phi(x,y+h) + \phi(x+h,y)}{h^2} = 0$$ (2pts)

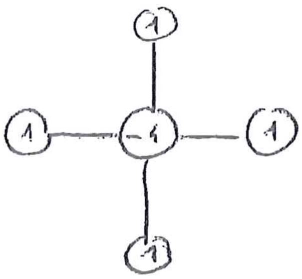
3 représentation symbolique 2D



scaling = $1/h^2$

(1pt)

4 si $x = -1$



c'est l'operateur dérivée seconde à 2 dimensions

(1pt)

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} - ih\left(\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}\right) = 0.$$

$$\frac{1}{h^2}\left(u_{i-1,j} - (ih)\,u_{i,j-1} - [2(1+ih)\,u_{i,j}] + u_{i+1,j} - (ih)\,u_{i,j+1}\right) = 0.$$

$-2u_{i,j}(1-ih)$