## QCM (2pts)

1) $\det(A) \neq 0$ 0,5pt

2) $\frac{1}{2}\left(f(0) - f(1)\right)$ et $\frac{1}{8}\left(f(0) - 3f(1/3) + 3f(2/3) - f(1)\right)$ car $\sum_i w_i \neq 1$ 0,5pt

3) Stable et convergente 0,5pt

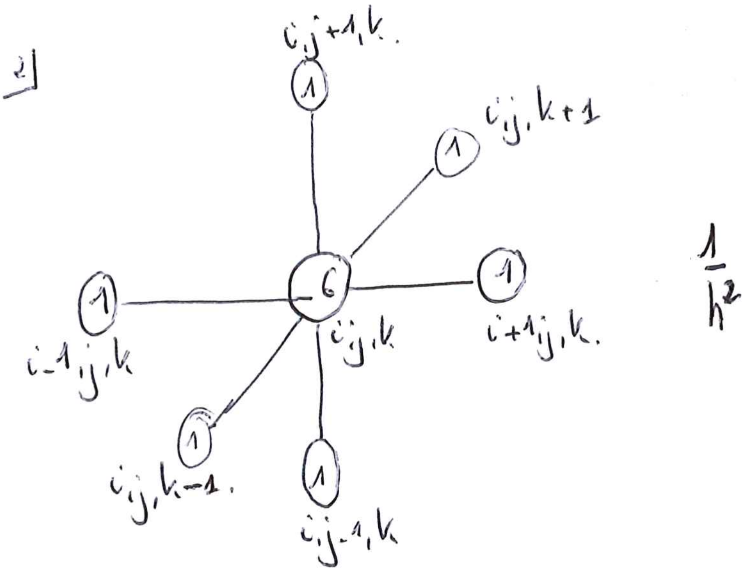
4) $\frac{a}{h^2}\left(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}\right) + \frac{b}{2h}\left(u_{i+1} - u_{i-1}\right) + cu_i = 0.$ 0,5pt.

## Exercice I (2pts)

1) En 1d, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \simeq \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{J+1}}{h^2}$ 1pt

En 3d, $\Delta_h u_{i,j,k} = \frac{u_{i-1,j,k} + u_{i,j-1,k} + u_{i,j,k-1} - 6u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j,k+1}}{h^2}$

2)




1pt

## Exercice II (6pts)

1) $L_1(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{-1(-2)(-3)} = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6}$

$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)} = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2}$

$L_3(x) = \frac{(x+1)x(x-2)}{2.1(-1)} = -\frac{1}{2}(x+1)x(x-2) = \frac{-x^3 + x^2 + 2x}{2}$

$L_4(x) = \frac{(x+1)x(x-1)}{3.2.1} = \frac{1}{6}(x+1)x(x-1) = \frac{x^3 - x}{6}$ 2pts

Exercice II (suite)

2) $L_1(-1) = 1$ , $L_1(0) = 0$ , $L_1(1) = 0$ , $L_1(2) = 0$ ,

$L_2(-1) = 0$ , $L_2(0) = 1$ , $L_2(1) = 0$ , $L_2(2) = 0$ ,

$L_3(-1) = 0$ , $L_3(0) = 0$ , $L_3(1) = 1$ , $L_3(2) = 0$ ,

$L_4(-1) = 0$ , $L_4(0) = 0$ , $L_4(1) = 0$ , $L_4(2) = 1$ .

1pt

3) On utilise la Formule de Lagrange :

$$P(x) = -x(x-1)(x-2) + (x+1)(x-1)(x-2) + (x+1)x(x-2) - (x+1)x(x-1)$$

$$= -4x + 2$$

2pts

$$= 2(1-2x).$$

4) $P(-1) = 6$

$P(0) = 2$

$P(1) = -2$

1pt

$P(2) = -6$

Le polynôme d'interpolation vérifie bien les 4 contraintes d'interpolation.

## Problème (10pts)

1) Si $y(t) = \dfrac{1}{1+e^{-t}}$,

D'une part, $y'(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$ (1pt)

D'autre part, $y(t)(1-y(t)) = \left(\dfrac{1}{1+e^{-t}}\right)\left(\dfrac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\right)$ (1pt)

de sorte que $y'(t) = y(t)(1-y(t))$.

2) Le schéma d'Euler explicite s'obtient avec l'opérateur décentré à droite :

$$\mathcal{D}^{+}_{\delta t}\, y(t) = \frac{y(t+\delta t) - y(t)}{\delta t} \simeq f(t, y(t)),$$

ce qui donne pour notre flux

$$\boxed{y^{n+1} = y^n + \delta t\, y^n(1-y^n)}$$

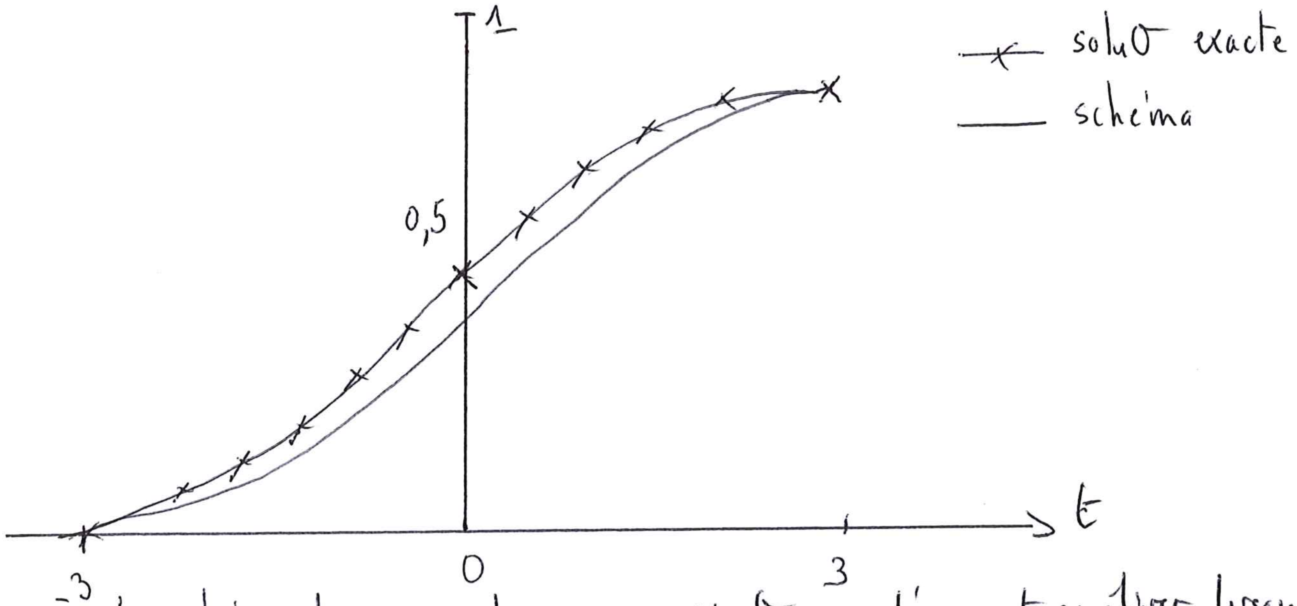
car $f(y(t)) = y(t)(1-y(t))$. (1pt)

3) $\delta t = 0{,}5\,s$

$$y^1 = y^0 + \frac{1}{2} y^0(1-y^0) \overset{AN}{=} 6.94.10^{-2} \quad \text{avec } y^0 = 0{,}047.$$ (2pts)

| t | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,047 | 0,069 | 0,102 | 0,147 | 0,210 | 0,293 | 0,397 | 0,516 | 0,641 | 0,756 | 0,848 | 0,913 | 0,952 |
| | 0,047 | 0,076 | 0,115 | 0,182 | 0,269 | 0,372 | 0,5 | 0,622 | 0,731 | 0,817 | 0,882 | 0,924 | 0,951 |

4)




Le schéma donne une bonne approximaO que l'on peut améliorer lorsque $\delta t \to 0$ (1pt)

Problème (suite)

5) La méthode des rectangles à gauche donne

$$y^{n+1} - y^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\, dt = \delta t\, f(y^n)$$

1pt

ce qui correspond au schéma d'Euler explicite : $y^{n+1} = y^n + \delta t\, y^n(1 - y^n)$.

6) La méthode des rectangles à droite donne

$$y^{n+1} - y^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\, dt = \delta t\, f(y^{n+1})$$

1pt

ce qui correspond au schéma d'Euler implicite : $y^{n+1} = y^n + \delta t\, y^{n+1}(1 - y^{n+1})$.

7) La méthode des trapèzes donne

$$y^{n+1} - y^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\, dt = \frac{\delta t}{2}\left(f(y^n) + f(y^{n+1})\right)$$

1pt

ce qui correspond au schéma de Crank-Nicolson : $y^{n+1} = y^n + \frac{\delta t}{2}\left[y^n(1-y^n) + \dots\right.$

$\left. y^{n+1}(1 - y^{n+1})\right]$.

8) Le schéma d'Euler explicite ne nécessite pas de traitement particulier malgré la non-linéarité du flux (contrairement aux schémas implicites).

1pt