ESTACA
3A

Outils numériques pour la modélisation
Examen

29/04/19

Questions de cours (3 points)

Chaque question a au moins une bonne réponse. Une question entièrement juste est comptée positivement et une question fausse négativement. Merci de répondre directement sur le sujet en noircissant la(les) bonne(s) réponse(s).

1. Lorsqu'une matrice est inversible, le pivotage dans la méthode de Gauss
   - ■ est toujours possible
   - □ est parfois impossible
   - ■ consiste à changer le pivot si celui-ci est nul
   - □ consiste à transposer la matrice

2. Soit un nuage de n points ($n \geq 2$), la droite de régression
   - ■ est obtenue en résolvant un problème de minimisation
   - □ passe obligatoirement par aucun point
   - □ passe obligatoirement par un point
   - □ passe obligatoirement par tous les points

3. Quel(s) nuage(s) de point a un très bon coefficient de corrélation linéaire ?

■ □ □ ■

4. Une formule d'intégration composite permet
   - ■ d'approcher le calcul d'une intégrale
   - □ d'approcher un opérateur différentiel
   - ■ d'utiliser des sous-intervalles pour améliorer l'intégrale d'une fonction
   - □ de trouver la droite de regression

5. Quelle(s) formule(s) d'intégration pour estimer $\int_0^1 f(x)dx$ est fausse ?
   - ■ $1/2f(0) - 1/2f(1)$
   - □ $1/4f(0) + 3/4f(2/3)$
   - □ $(f(0) + 3f(1/3) + 3f(2/3) + f(1))/8$
   - ■ $(f(0) - 3f(1/3) + 3f(2/3) - f(1))/8$

6. Quel est le terme de scaling d'un opérateur approchant la dérivée quatrième ?
   - □ h
   - □ $4h$
   - □ h^4
   - ■ $1/h^4$

Exercice 1

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

1pt

2) $B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad AB = 10I \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{B}{10} = \dfrac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

1pt

3) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

1pt

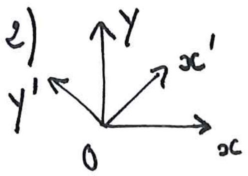
4) On ne calcule pas A^{-1} pour résoudre le système $Ax = b$.
On peut trianguler le système avec l'algorithme de Gauss.

1pt

Exercice 2

1) $$\Delta_h u_{ij} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}}{h^2}$$ (cF cours)

1pt

2)


Le repère $(Ox'y')$ est une rotation de $\frac{\pi}{4}$ du repère (Oxy) de sorte que
$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$
$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)$$

Calculons les dérivées partielles par rapport aux variables x et y en Fonction de x' et y'

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'}\right)$$

Montrons que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y'^2}$

2pts

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla\cdot\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\ \ \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\ \ \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial y'}\ \ \ \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'}\ \ \ \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} - \cancel{\frac{2\partial^2 u}{\partial x' y'}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \cancel{2\frac{\partial^2 u}{\partial x' y'}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}.$$

La Fin de la démonstration est immédiate (le pas étant $\sqrt{2}h$ au lieu de h).

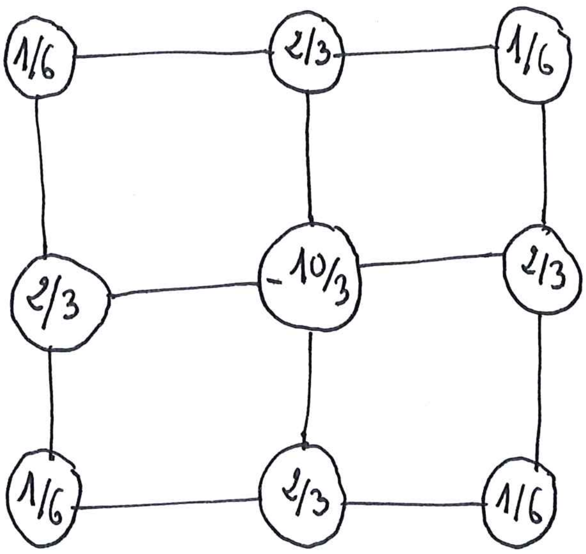
Exercice 2 (suite)

3) $$\Delta_h^* u_{i,j} = \frac{2}{3}\Delta_h u_{i,j} + \frac{1}{3}\Delta_h^{\times} u_{i,j}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\frac{2}{3}\left(u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}\right) + \frac{1}{6}\left(u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}\right) - \frac{10}{3}u_{i,j}\right]$$

1pt

La représentation symbolique est immédiate



$1/h^2$

1pt

On vérifie bien que la somme des coefficients est nulle.

Exercice 3

1) L'inconnue est φ et la variable t. (1pt)

2) Equation d'ordre 2 non-linéaire (terme $\sin(\varphi)$). (1pt)

3) φ^0 : angle initial et v^0 : vitesse initiale. (1pt)

4) $\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 + w^2 = 0$ avec $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$ la pulsation du système.

$\Rightarrow r = \pm i w$

La solution générale s'écrit $\varphi = \alpha e^{iwt} + \beta e^{-iwt}$ (1)

où α et β sont donnés par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \varphi(t=0) &= \alpha + \beta = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(t=0) &= iw(\alpha - \beta) = v_0 \end{aligned} \quad \left| \times iw \right. \quad \left| \times(-iw) \right.$$

(1pt)

$$iw\varphi_0 + v_0 = 2iw\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\varphi_0}{2} + \frac{v_0}{2iw} \quad (2)$$

$$-iw\varphi_0 + v_0 = -2iw\beta \Rightarrow \beta = \frac{\varphi_0}{2} - \frac{v_0}{2iw} \quad (3)$$

(2) et (3) dans (1) donne

$$\varphi = \left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{v_0}{2iw}\right)e^{iwt} + \left(\frac{\varphi_0}{2} - \frac{v_0}{2iw}\right)e^{-iwt} = \varphi_0 \underbrace{\left(\frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}\right)}_{\cos(wt)} + \frac{v_0}{w}\underbrace{\left(\frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2}\right)}_{\sin(wt)}$$

5)

$$\dot{X} = F(X) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ -w^2\sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad \text{avec } X^0 = \begin{bmatrix} v_0 \\ -w^2\sin(\varphi^0) \end{bmatrix} \quad \text{et } X = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

(1pt)

6) Le schéma d'Euler explicite s'écrit $X^{n+1} = X^n + \delta t\, F(X^n)$.

$$X^1 = X^0 + \delta t\, F(X^0) \overset{AN}{=} \begin{bmatrix} \pi/4 \\ -0{,}35 \end{bmatrix}$$

(2pts)

Exercice 3 (suite)

6) $X^2 = X^1 + \delta t\, F(X^1) \overset{AN}{=} \begin{bmatrix} 1{,}01 \\ -0{,}69 \end{bmatrix}$ $\quad X^3 = \begin{bmatrix} 0{,}94 \\ -1{,}03 \end{bmatrix}$ $\quad X^4 = \begin{bmatrix} 0{,}84 \\ -1{,}36 \end{bmatrix}$ $\quad X^5 = \begin{bmatrix} 0{,}70 \\ -1{,}65 \end{bmatrix}$

7) Les valeurs de φ associées au cas linéarisé sont

$\varphi^1 = 1{,}03$; $\varphi^2 = 0{,}96$; $\varphi^3 = 0{,}86$; $\varphi^4 = 0{,}73$; $\varphi^5 = 0{,}57$

Les écarts sont de deux natures : 1pt

* modèles différents (linéarisation dans un cas)
* résolution différentes (exacte vs numérique => vérifier l'influence de δt).