ESTACA **Outils numériques pour la modélisation** 27/10/16
3A **Examen**

Questions de cours (4 points)

Chaque question a au moins une bonne réponse. Une question entièrement juste est comptée positivement et une question fausse négativement. Merci de répondre directement sur le sujet en noircissant la(les) bonne(s) réponse(s).

1. Lorsqu'une matrice est inversible, le pivotage dans la méthode de Gauss
   - ☐ est toujours possible
   - ☐ est parfois impossible
   - ☐ consiste à changer le pivot si celui-ci est nul
   - ☐ consiste à transposer la matrice
2. Soit un nuage de n points ($n \geq 2$), la droite de régression
   - ☐ passe obligatoirement par aucun point
   - ☐ passe obligatoirement par deux points
   - ☐ passe obligatoirement par tous les points
   - ☐ minimise la somme des carrés des distances entre la droite et les points
3. La régression linéaire est de mauvaise qualité si le coefficient de corrélation linéaire est
   - ☐ proche de -1
   - ☐ proche de 0
   - ☐ proche de 1
   - ☐ le plus grand possible
4. Une formule d'intégration composite permet
   - ☐ d'approcher le calcul d'une intégrale
   - ☐ d'estimer l'aire sous une courbe
   - ☐ d'approcher un opérateur différentiel
   - ☐ de trouver la droite de regression
5. Une méthode de résolution d'une EDP doit être
   - ☐ convergente
   - ☐ divergente
   - ☐ stable
   - ☐ non-linéaire
6. Quel opérateur approche la dérivée seconde de la fonction f en x ?
   - ☐ $(f(x-h)+2f(x)+f(x+h))/h$
   - ☐ $(f(x-h)-2f(x)+f(x+h))/h$
   - ☐ $(f(x-h)+2f(x)+f(x+h))/h^2$
   - ☐ $(f(x-h)-2f(x)+f(x+h))/h^2$
7. Quel opérateur approche le laplacien 2D de la fonction f en (x,y) ?
   - ☐ $(f(x-h,y)+f(x,y-h)+4f(x,y)+f(x+h,y)+f(x,y+h))/h$
   - ☐ $(f(x-h,y)+f(x,y-h)-4f(x,y)+f(x+h,y)+f(x,y+h))/h$
   - ☐ $(f(x-h,y)+f(x,y-h)+4f(x,y)+f(x+h,y)+f(x,y+h))/h^2$
   - ☐ $(f(x-h,y)+f(x,y-h)-4f(x,y)+f(x+h,y)+f(x,y+h))/h^2$

8. Quelle EDP est instationnaire et linéaire ?
   - ☐ $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$
   - ☐ $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$
   - ☐ $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$
   - ☐ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \dfrac{\partial u}{\partial x} + \gamma u = 0$

Exercice 1 - Système linéaire (5 points)

On considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 3x + 3y + z = 0 \\ 4x + 4y - z = 2 \\ \quad y + 4z = 1 \end{cases}$$

1. Ecrire ce système sous forme matricielle.
2. Calculer la matrice $A^{(2)}$ et le second membre $b^{(2)}$ issu de l'algorithme de Gauss*.
3. Est-il possible de poursuivre l'algorithme de Gauss ? Si non, que faut-il faire ?
4. En déduire la solution du système linéaire.

Indication* : la matrice $A^{(2)}$ a une première colonne nulle excepté son coefficient diagonal.

Exercice 2 - Intégration numérique (6 points)

Le moment d'inertie est une grandeur couramment utilisée en résistance des matériaux. Pour une poutre de section rectangulaire S, le moment d'inertie par rapport à l'axe Ox est défini par

$$I_x \overset{\text{def}}{=} \int_S y^2 ds = \iint_S y^2 dxdy. \tag{1}$$

La section S a une largeur b selon la direction x et une hauteur h selon y (voir figure 1). Nous souhaitons estimer l'intégrale (1) par deux formules d'intégration numériques, l'une issue de la tensorisation de la formule des trapèzes et l'autre issue de la tensorisation de la formule de Gauss à 2 points. Sur le carré $[-1, 1]^2$, les couples (points ;poids) associées à la méthode des trapèzes tensorisée sont donnés par

$$((-1, -1); 1),\ ((-1, 1); 1),\ ((1, -1); 1),\ ((1, 1); 1), \tag{2}$$

et ceux associés à la méthode de Gauss tensorisée sont

$$((-\alpha, -\alpha); 1),\ ((-\alpha, \alpha); 1),\ ((\alpha, -\alpha); 1),\ (\alpha, \alpha); 1), \tag{3}$$

avec $\alpha = \sqrt{3}/3$.

1. Montrer que l'intégrale I_x vaut exactement $bh^3/12$.
2. Représenter les points de chaque formule sur le rectangle $\mathcal{R} = [-b/2, b/2] \times [-h/2, h/2]$.
3. Montrer que les poids valent $bh/4$ lorsque l'on intègre sur $\mathcal{R}$.
4. Appliquer la formule de quadrature 2D pour estimer I_x avec les méthodes précédentes.
5. Conclure.

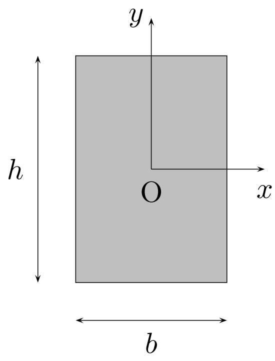

Figure 1 – Section transversale S.

Exercice 3 - Différences finies (5 points)

Un modèle mathématique pouvant être utilisé pour étudier les écoulements transsoniques est l'équation d'Euler–Tricomi,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0,$$

qui est obtenue en linéarisant (par transformation hodographique) une EDP non linéaire satisfaite par le potentiel des vitesses φ. L'inconnue est reliée au potentiel par $\varphi = -\Phi + V\frac{\partial \Phi}{\partial V}$ où $V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, v étant le champ de vitesse.

Nous souhaitons écrire un schéma aux différences finies pour trouver la fonction Φ sur un maillage de pas h identique suivant les directions x et y.

1. Donner l'expression de l'opérateur $\mathcal{D}_h^{(2)}$ approchant la dérivée seconde d'une fonction.
2. En déduire un schéma pour résoudre l'équation bidimensionnelle d'Euler–Tricomi.
3. Donner la représentation symbolique de l'opérateur associé à ce schéma*.
4. Quel opérateur obtient-on lorsque le coefficient de pondération $-x$ devient égal à 1 ?

Indication* : certains coefficients de pondération dépendent de l'espace.

Annexe - Méthode de Gauss

L'étape k élimine les coefficients de la k-ième colonne des lignes $k+1$ à n à l'aide des multiplicateurs

$$\forall\ k+1 \leq i \leq n, \quad m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},$$

où $a_{kk}^{(k)}$ est le *pivot* de l'étape k. Les coefficients

$$\forall\ k+1 \leq i,j \leq n, \quad a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)},$$
$$\forall\ k+1 \leq i \leq n, \quad b_{i}^{(k+1)} = b_{i}^{(k)} - m_{ik}b_{k}^{(k)},$$

sont les coefficients des lignes $k+1$ à n de la matrice $A^{(k+1)}$ et du second membre $b^{(k+1)}$.