ESTACA **Outils numériques pour la modélisation** 30/04/18
3A **Examen**

Questions de cours (2 points)

Chaque question a au moins une bonne réponse. Une question entièrement juste est comptée positivement et une question fausse négativement. Merci de répondre directement sur le sujet en noircissant la(les) bonne(s) réponse(s).

1. Pour résoudre un système linéaire $Ax = b$, il faut
   - ☐ $\det(A) = 0$
   - ☐ $\det(A) \neq 0$
   - ☐ calculer impérativement A^{-1}
   - ☐ un second membre b nul
2. Quelle(s) formule(s) d'intégration pour estimer $\int_0^1 f(x)dx$ est fausse ?
   - ☐ $1/2f(0) - 1/2f(1)$
   - ☐ $1/4f(0) + 3/4f(2/3)$
   - ☐ $(f(0) + 3f(1/3) + 3f(2/3) + f(1))/8$
   - ☐ $(f(0) - 3f(1/3) + 3f(2/3) - f(1))/8$
3. Une méthode de résolution d'une EDP doit être
   - ☐ stable
   - ☐ convergente
   - ☐ symétrique
   - ☐ interpolante
4. Quel schéma centré est adapté à la discrétisation de l'équation d'advection-diffusion-réaction, $-au'' + bu' + cu = 0$?
   - ☐ $\frac{a}{h}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) + \frac{b}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) + cu_i = 0$
   - ☐ $\frac{a}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) + \frac{b}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) + cu_i = 0$
   - ☐ $\frac{a}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) + \frac{b}{h}(u_{i+1} - u_{i-1}) + cu_i = 0$
   - ☐ $\frac{a}{h^2}(-u_{i-1} - 2u_i - u_{i+1}) + \frac{b}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) + cu_i = 0$

Exercice 1 - Opérateur aux différences finies (2 points)

1. Déterminer l'opérateur centré approchant le Laplacien en dimension 3,
$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$
   Le maillage est supposé uniforme et isotrope, c'est-à-dire que le pas de discrétisation h est constant et identique dans les trois directions.
2. Donner la représentation symbolique de cet opérateur.

Exercice 2 - Polynôme d'interpolation (6 points)

1. Déterminer la base des polynômes de Lagrange associés aux points $-1, 0, 1$ et 2.
2. Evaluer chaque polynôme de Lagrange en ces quatre points. Conclure.
3. Donner le polynôme interpolant les couples de points $(-1, 6), (0, 2), (1, -2), (2, -6)$.
4. Evaluer ce polynôme d'interpolation aux points $-1, 0, 1$ et 2. Conclure.

Problème - Intégration numérique (10 points)

Nous souhaitons résoudre l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = f(t, y(t)). \tag{1}$$

1. Vérifier que la fonction sigmoïde $y(t) = 1/(1+\exp(-t))$ est la solution exacte de cette équation lorsque le flux est égal à $y(t)(1 - y(t))$.

Une première approche pour estimer la solution de cette EDO est de remplacer l'opérateur différentiel continu par un opérateur aux différences finies,

$$\mathcal{D}_{\delta t} y(t) \simeq f(t, y(t)).$$

2. Ecrire le schéma d'Euler explicite en précisant l'opérateur discret utilisé.
3. Calculer douze valeurs associées à une discrétisation uniforme de l'intervalle $[-3, 3]$. La valeur de la solution exacte $y_0 = 0.047$ en $t = -3$ permettra d'initialiser le schéma.
4. Tracer la solution exacte et les valeurs obtenues par le schéma. Conclure.

Une autre approche est d'intégrer l'EDO, ce qui conduit à

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))dt, \tag{2}$$

lorsque l'intervalle d'intégration, de longueur δt, est $[t^n, t^{n+1}]$.

5. Ecrire puis nommer le schéma obtenu avec la méthode des rectangles à gauche pour estimer l'intégrale dans (2) ?
6. Ecrire puis nommer le schéma obtenu avec la méthode des rectangles à droite pour estimer l'intégrale dans (2) ?
7. Montrer que le schéma obtenu avec la méthode des trapèzes s'écrit

$$y^{n+1} - y^n = \frac{\delta t}{2} \left(y^n - (y^n)^2 + y^{n+1} - \left(y^{n+1}\right)^2 \right).$$

8. Quel(s) schéma(s) peut s'appliquer directement malgré la nonlinéarité du flux ?

Annexe - Polynômes de Lagrange

Soient $n+1$ réels distincts notés $\{x_i\}_{0 \le i \le n}$. Les $n+1$ polynômes de Lagrange associés à ces points sont définis par

$$L_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad 0 \le i \le n.$$

Le polynôme d'interpolation est défini à partir des polynômes de Lagrange L_i selon la relation suivante

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x).$$