ESTACA 3A

Outils numériques pour la modélisation
Examen

29/04/19

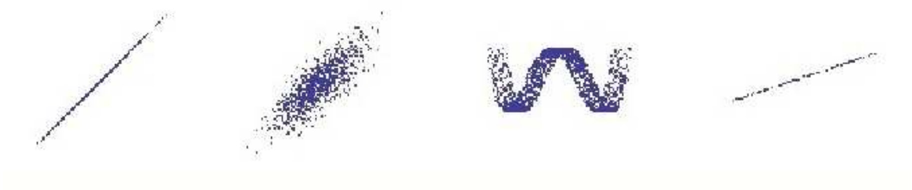
Questions de cours (3 points)

Chaque question a au moins une bonne réponse. Une question entièrement juste est comptée positivement et une question fausse négativement. Merci de répondre directement sur le sujet en noircissant la(les) bonne(s) réponse(s).

1. Lorsqu'une matrice est inversible, le pivotage dans la méthode de Gauss
   - ☐ est toujours possible
   - ☐ est parfois impossible
   - ☐ consiste à changer le pivot si celui-ci est nul
   - ☐ consiste à transposer la matrice

2. Soit un nuage de n points ($n \geq 2$), la droite de régression
   - ☐ est obtenue en résolvant un problème de minimisation
   - ☐ passe obligatoirement par aucun point
   - ☐ passe obligatoirement par un point
   - ☐ passe obligatoirement par tous les points

3. Quel(s) nuage(s) de point a un très bon coefficient de corrélation linéaire ?



☐ ☐ ☐ ☐

4. Une formule d'intégration composite permet
   - ☐ d'approcher le calcul d'une intégrale
   - ☐ d'approcher un opérateur différentiel
   - ☐ d'utiliser des sous-intervalles pour améliorer le calcul d'une intégrale
   - ☐ de trouver la droite de regression

5. Quelle(s) formule(s) d'intégration pour estimer $\int_0^1 f(x)dx$ est fausse ?
   - ☐ $1/2f(0) - 1/2f(1)$
   - ☐ $1/4f(0) + 3/4f(2/3)$
   - ☐ $(f(0) + 3f(1/3) + 3f(2/3) + f(1))/8$
   - ☐ $(f(0) - 3f(1/3) + 3f(2/3) - f(1))/8$

6. Quel est le terme de scaling d'un opérateur approchant la dérivée quatrième ?
   - ☐ h
   - ☐ $4h$
   - ☐ h^4
   - ☐ $1/h^4$

Exercice 1 - Résolution d'un système linéaire (4 points)

Nous souhaitons résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ -3x + y - z = 5 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

1. Ecrire le système sous forme matricielle.
2. Calculer $B = 4A - A^2$ puis AB où A désigne la matrice du système. En déduire A^{-1}.
3. Déterminer x, y et z.
4. Est-ce obligatoire de calculer A^{-1} pour résoudre un système linéaire ?
   Si non, quelle méthode préconisez-vous ? Justifier

Exercice 2 - Opérateur aux différences finies (5 points)

Plusieurs opérateurs aux différences finies peuvent être utilisés pour approcher un même opérateur continu et nous proposons de regarder le cas du Laplacien en dimension deux. Le maillage est supposé uniforme et isotrope, c'est-à-dire que le pas de discrétisation h est constant et identique dans les deux directions.

1. Montrer que l'opérateur $\Delta_h u_{i,j}$ associé au stencil standard de la figure 1a est

$$\Delta_h u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}}{h^2}. \tag{1}$$

2. Montrer que l'opérateur $\Delta_h^\times u_{i,j}$ associé au stencil oblique de la figure 1b est

$$\Delta_h^\times u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}}{2h^2}. \tag{2}$$

   Indication : utiliser l'identité $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$ et les deux relations suivantes

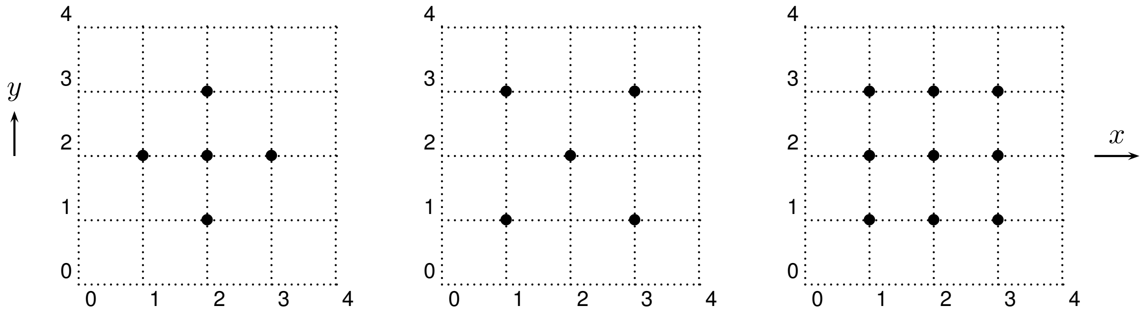
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'}\right),$$

   où $(Ox'y')$ désigne le repère (Oxy) ayant subi une rotation de $\pi/4$.

Toute combinaison linéaire du type $(1-\alpha)\Delta_h u_{i,j} + \alpha\Delta_h^\times u_{i,j}$ est également un opérateur aux différences finies ayant le stencil à 9 points de la figure 1c. La valeur $\alpha = 1/3$ est particulièrement intéressante pour les fonctions biharmoniques [1] car elle fournit une approximation d'ordre 4.

3. Calculer l'opérateur $\Delta_h^* u_{i,j} = \dfrac{2}{3}\Delta_h u_{i,j} + \dfrac{1}{3}\Delta_h^\times u_{i,j}$ puis déterminer sa représentation symbolique.

1. i.e. dont le bilaplacien est nul, comme la fonction d'Airy (potentiel des contraintes) en élasticité plane.



(a) Stencil standard à 5 points (b) Stencil oblique à 5 points (c) Stencil à 9 points

FIGURE 1: Stencils des opérateurs $\Delta_h u_{i,j}$ (gauche), $\Delta_h^{\times} u_{i,j}$ (milieu) et $\Delta_h^{*} u_{i,j}$ (droite).

Exercice 3 - EDO (8 points)

L'angle φ avec la verticale d'un pendule sans amortissement est modélisé par le système

$$\begin{cases} \varphi'' + \dfrac{g}{l}\sin(\varphi) = 0, \quad \forall t > 0, & (3a) \\ \varphi(0) = \varphi^0, & (3b) \\ \varphi'(0) = v^0. & (3c) \end{cases}$$

où $g = 10\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ est l'accélération de la gravité et l la longueur du pendule.

1. Quelle est l'inconnue du problème et sa variable associée ?
2. Quel est l'ordre de l'équation (3a) ? Cette équation est-elle linéaire ? Justifier.
3. Que représentent φ^0 et v^0 ?
4. Résoudre l'équation (3a) sous l'hypothèse des petits angles $\sin(\varphi) \simeq \varphi$.
5. Reformuler le système (3) sous la forme d'un problème de Cauchy en introduisant le vecteur $x \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi, \varphi')^\top$.
6. Appliquer la méthode d'Euler explicite sur les cinq premiers pas de temps en prenant $l = 2.5$ m, $\varphi^0 = \pi/4$, $v^0 = 0$ et $\delta t = 0.1$ s.
7. Comparer avec la solution obtenue à la question 4. D'où viennent les écarts ?