E.S.T.P
ME1

Projet d'Hydrodynamique.

P. Sochala

A rendre pour le 17/12/07

12/11/07

Présentation

Les milieux poreux sont constitués d'une partie solide (appelée squelette) et d'une partie fluide

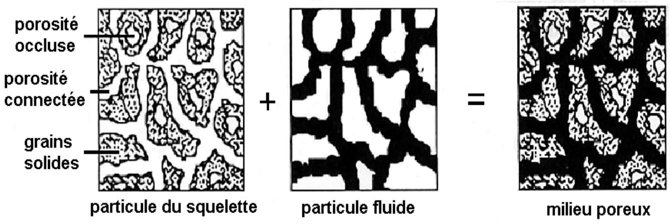


Schéma d'un milieu poreux.

De façon générale, un milieu poreux est définis par deux critères :
- il doit contenir de petits espaces vides appelés pores et délimités par la matrice solide,
- il doit être perméable à un écoulement de fluide.

Ces critères renvoient à deux caractéristiques essentielles d'un milieu poreux :

1. la *porosité* φ qui représente la fraction de vide

$$\varphi = \frac{\text{Volume des pores}}{\text{Volume total du milieu poreux}}$$

2. la *perméabilité* K qui indique l'aptitude a être traversé par un écoulement

Nous définissons également

1. la *surface spécifique* S_{sp}

$$S_{sp} = \frac{\text{Surface des pores}}{\text{Volume total du milieu poreux}}$$

2. la *tortuosité* τ qui est le rapport entre la longueur effective L' et la longueur L d'un canal (ou capillaire)

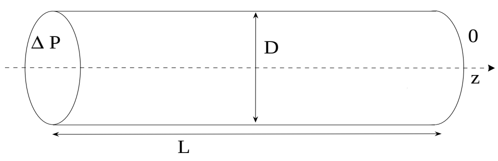
$$\tau = \frac{L'}{L}$$

La tortuosité est supérieure (ou égale) à 1 car la longueur effective L' est supérieure (ou égale) à la longueur L.

Nous supposons que le fluide est newtonien de viscosité dynamique μ.

Partie 1 : Ecoulement dans une conduite cylindrique horizontale (7 points)

On considère dans cette première partie l'écoulement dans une conduité cylindrique horizontale de longueur L, de diamètre D et de section S_c. Le fluide est soumis à une différence de pression ΔP entre l'entrée et la sortie du cylindre.



Ecoulement dans un cylindre.

1. A partir de l'expression d'un champ de vitesse général, justifier que le champ de vitesse v dans la conduite peut se simplifier en

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v(r) \end{pmatrix}$$

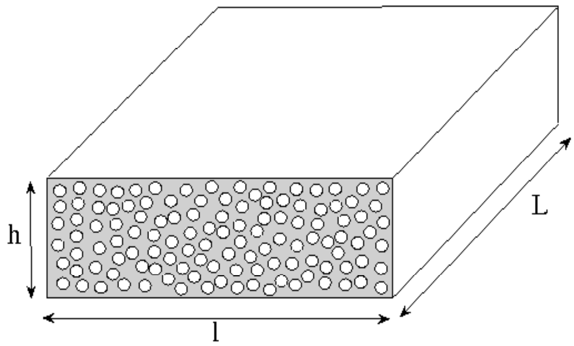
2. Donner les équations du mouvement régissant cet écoulement.
3. Calculer et représenter le champ de vitesse v.
4. En déduire dans une section droite :
   - la vitesse moyenne v_{moy},
   - la vitesse maximale v_{max},
   - le débit volumique Q_v,
   - la relation entre la vitesse moyenne et la vitesse maximale,
   - la relation entre la vitesse moyenne et le débit volumique.
5. Montrer que la contrainte tangentielle est maximale au niveau de la paroi du tube. En déduire l'expression de la force d'entrainement exercée par le fluide sur le tube en fonction du débit Q_v, de la viscosité μ et des caractéristiques géométriques du tube.

Partie 2 : Ecoulement dans un milieu poreux constitué de tubes (6 points)

On considère dans cette partie un milieu poreux représenté par un ensemble de n tubes cylindriques de même longueur L et de même rayon R.

1. Déterminer le débit volumique Q à travers le milieu poreux.
2. En déduire la vitesse de filtration v_f en fonction de la perte de charge ΔP, de la longueur L, de la porosité φ et des caractéristiques du fluide et des capillaires.
3. En déduire l'expression de la perméabilité intrinsèque K qui est reliée à la vitesse de filtration par la loi de Darcy

$$v_f = \frac{K}{\mu}\frac{\Delta P}{L} \ .$$

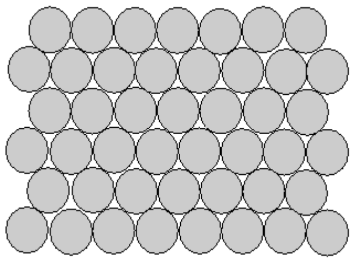


Approximation d'un milieu poreux par un ensemble de cylindres.

4. Montrer que la perméabilité intrinsèque peut s'exprimer seulement en fonction de la porosité φ et de la surface spécifique S_{sp}.
5. Quelle est l'unité de la perméabilité intrinsèque ?

Partie 3 : Ecoulement dans un milieu poreux constitué de billes (7 points)

On considère maintenant un milieu poreux représenté par un empilement de billes de rayon r et de diamètre D



Approximation d'un milieu poreux par un empilement de billes.

1. En supposant que l'expression de la perméabilité intrinsèque établie pour le milieu poreux constitué de cylindres droits est valable pour le milieu poreux constitué des billes, montrer que la perméabilité du milieu constitué des billes est donnée par la relation
$$K = \frac{\varphi^3 D^2}{72(1-\varphi)^2} \qquad (1)$$
dans laquelle D représente le diamètre moyen des billes.
2. On suppose maintenant que le milieux poreux constitué des billes est approché par un milieu poreux constitué de cylindres tortueux. En s'inspirant de la partie 2, donner l'expression modifiée de la relation (1) en fonction de la tortuosité τ.
3. Donner par une analyse géométrique la tortuosité τ dans l'assemblage des billes.
4. Caluler la perméabilité intrinsèque théorique pour un sable de porosité $\varphi = 0.4$ formé de grains de diamètre moyen $D = 80.10^{-6}m$.
Comparer avec les résultats d'une étude expérimentale donnant une perméabilité intrinsèque $K = 6500\ millidarcy$ ($1darcy = 9.87.10^{-13}SI$).

Formulaire en coordonnées cylindriques

Equation de continuité

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

Equation de Navier-Stokes

- composante radiale r

$$\rho\Big(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta^2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\Big)+\frac{\partial p}{\partial r}=F_r+\mu\Big(\frac{\partial}{\partial r}\big(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}\big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\Big)$$

- composante azimutale θ

$$\rho\Big(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\Big)+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}=F_\theta+\mu\Big(\frac{\partial}{\partial r}\big(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}\big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\Big)$$

- composante axiale z

$$\rho\Big(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\Big)+\frac{\partial p}{\partial z}=F_z+\mu\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\Big)$$