E.S.T.P
ME1

Application d'Hydrodynamique n°1.

P. Sochala

27/11/08

Hydrostatique

Exercice 1 (6 points)

Un cuvelage en béton est fabriqué pour protéger un parking souterrain contre les montées de nappe phréatique éventuelles. Les dimensions extérieures (longueur L, largeur l et hauteur H) de ce cuvelage rectangulaire sont

$$L = 40m, \quad l = 12.5m \quad \text{et} \quad H = 4.75m.$$

L'épaisseur du fond et des quatre parois verticales est constante égale à $30cm$ et la nappe phréatique se situe à une hauteur h au-dessus du fond du parking. Les applications numériques seront réalisées avec les valeurs suivantes

$$\rho_{\text{eau}} = 1000kg.m^{-3}, \quad \rho_{\text{beton}} = 2200kg.m^{-3} \quad \text{et} \quad g = 10m.s^{-2}.$$

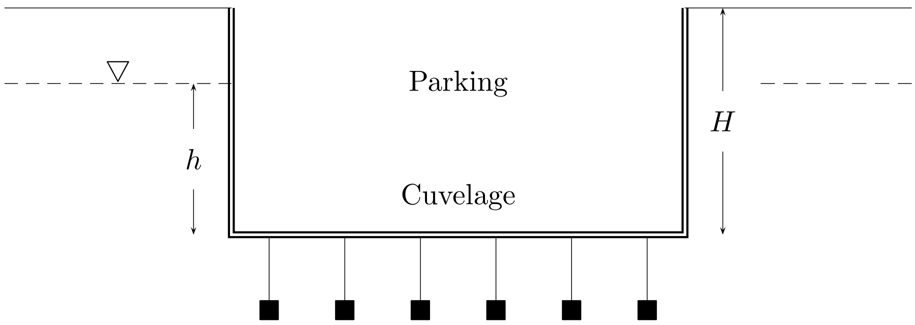

Fig. 1 – Coupe (transversale ou longitudinale).

1. Donner la masse du cuvelage.
2. Déterminer l'intensité de la force F exercée par l'eau sur chacune des parois verticales et sur le fond du cuvelage.
3. Donner la poussée d'Archimède que subit le cuvelage.
4. Déterminer la hauteur d'eau limite h_{lim} à partir de laquelle le cuvelage doit être ancré.
5. Calculer l'intensité de la force exercée par les tirants sur le cuvelage pour $h = 2h_{\text{lim}}$.

Exercice 2 (4 points)

Un récipient cylindrique qui contient de l'eau tourne autour de son axe vertical (orienté vers le haut) à une vitesse angulaire ω constante. On rappelle que les accélérations par rapport à des référentiels fixe et mobile sont liées par la relation

$$a_{\text{abs}} = a_{\text{rel}} + \omega \wedge (\omega \wedge OM) + \frac{d\omega}{dt} \wedge OM + 2\omega \wedge v_{rel}.$$

1. Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique.
2. En déduire que la forme de la surface libre est un paraboloïde d'axe celui du récipient.

Fluides parfaits

Exercice 3 (6 points)

Nous étudions l'écoulement bidimensionnel d'un fluide sur une bosse dont la géométrie est décrite par la fonction $b(x)$. L'objectif est de déterminer la variation de la surface libre $f(x)$ au niveau de la bosse. Avant et après l'obstacle, l'écoulement est horizontal (vitesse $v = v_x x$) et la hauteur H de fluide est constante. L'écoulement est permanent et le fluide incompressible. Les variations de la surface libre et de la côte du fond sont négligeables devant la hauteur d'eau H.

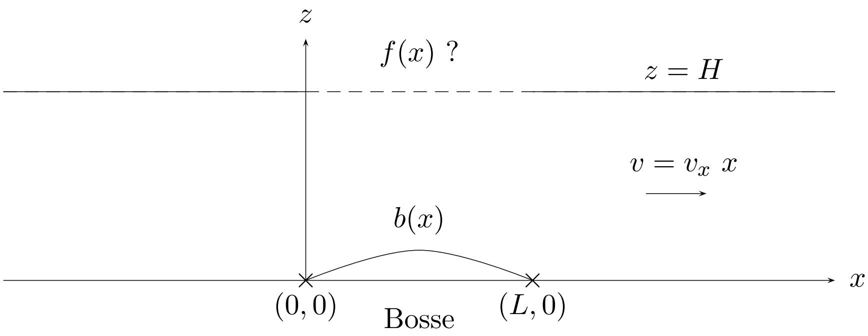

Fig. 2 – Ecoulement avec variation de la côte du fond.

1. Exprimer la conservation de la masse pour $0 \leq x \leq L$.
2. Exprimer la conservation de l'énergie pour $0 \leq x \leq L$.
3. Montrer qu'en utilisant certaines approximations, la variation de la surface libre $f(x)$ s'écrit
$$f(x) = \frac{b(x)}{1 - gH/v_x^2}.$$
4. En déduire la variation de la surface libre suivant la variation de la côte du fond.

Exercice 4 (4 points)

On suppose un écoulement plan irrotationnel. Un tourbillon ponctuel de circulation Γ peut être représenté par le potentiel complexe

$$f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}ln(z).$$

1. Déterminer le potentiel des vitesses φ et la fonction de courant ψ.
2. En déduire les équipotentielles et les lignes de courant. Les représenter.
3. Donner le champ de vitesse.
4. Vérifier que le fluide est incompressible et que le mouvement est irrotationnel.