E.S.T.P
ME1

Application d'Hydrodynamique n°2.

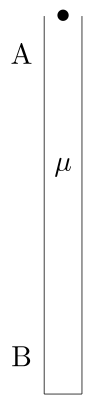
P. Sochala

07/12/09

Exercice 1 (3 points)

Nous souhaitons mesurer la viscosité dynamique μ d'un liquide à l'aide d'un viscosimètre à chute de bille. Cet appareil est constitué d'un long tube de verre rempli de liquide dans lequel on laisse tomber une bille sphérique de rayon r_{b} et de masse volumique ρ_{b}. Le mouvement de la sphère est supposé uniforme entre les points A et B. Le temps mis par la sphère pour aller de A à B est noté t. La force de frottement F_{r} exercée sur la bille est donnée par la loi de Stokes : $F_{\mathrm{r}} = 6\pi\mu r_{\mathrm{b}} v_{\mathrm{b}}$.

1. Ecrire le bilan des forces appliquées à la bille.
2. En déduire l'expression littérale de la viscosité.
3. Calculer la viscosité du lait sachant que
   $r_{\mathrm{b}} = 1mm$, $\rho_{\mathrm{b}} = 1050kg.m^{-3}$, $\rho_{\mathrm{lait}} = 1032kg.m^{-3}$, $|AB| = 30cm$ et $t = 10s$.



Exercice 2 (4 points)

Un tube de diamètre $D = 5mm$ et de rugosité $\epsilon = 0.1mm$ transporte de l'eau à $20^{\circ}C$ (viscosité dynamique $\mu = 10^{-3}Pa.s$). Le débit est $Q = 20cm^3.s^{-1}$.

1. Rappeler l'expression de la chute linéique de pression (en fonction de D, μ, Q) pour un écoulement laminaire dans une conduite cylindrique. Application numérique.
2. Calculer le nombre de Reynolds. L'écoulement est-il laminaire ?
3. Si l'écoulement est turbulent, donner la nouvelle chute linéique de pression.

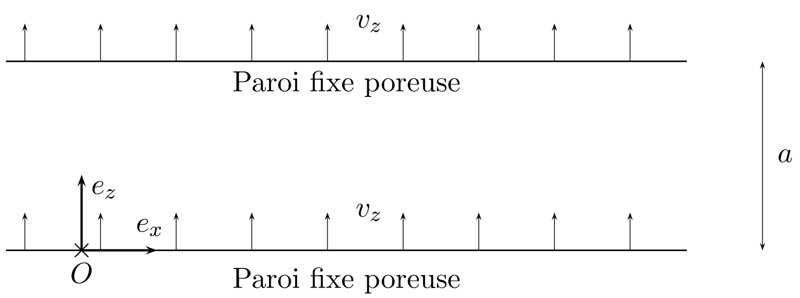
Exercice 3 (7 points)

Nous étudions l'écoulement d'un fluide dans un canal souterrain entre deux parois poreuses. La masse volumique du fluide est notée ρ et sa viscosité dynamique est notée μ. Les parois sont séparées d'une distance a et l'écoulement est supposé bidimensionnel plan. Le champ de vitesse est de la forme

$$v = v_x(z)e_x + v_z e_z,$$

avec $v_z =$ cste. Le fluide est incompressible, l'écoulement est stationnaire et $v_x(0) = v_x(a) = 0$.

1. Ecrire les équations de Navier–Stokes du problème.
2. Montrer que le gradient de pression est tel que
$$\nabla p = \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix},$$
avec G constante.
3. Montrer que $v_x(z)$ vérifie l'équation
$$\nu \frac{d^2 v_x}{dz^2} - v_z \frac{dv_x}{dz} = \frac{G}{\rho}.$$
4. Résoudre cette équation.
5. Commenter le résultat obtenu.
6. On pose $z^* = \dfrac{z}{a}$ et $V(z^*) = \dfrac{\rho v_z}{Ga} v_x(z)$.
Tracer la courbe $V = f(z^*),\ 0 \leq z^* \leq 1$ pour $\dfrac{v_z a}{\nu} = 50$.



Exercice 4 (6 points)

Soit un canal rectiligne de section rectangulaire de largeur l, de hauteur d'eau h. La vitesse d'écoulement est supposée uniforme égale à v. Les quantités l, h et v varient le long du canal mais sur de très grandes distances caractéristiques. L'eau est assimilée à un fluide parfait homogène, incompressible et l'écoulement est permanent.

1. Exprimer le débit volumique Q à travers une section du canal. Que sait-on de Q ?
2. Montrer que la quantité $h + \dfrac{v^2}{2g}$ est une constante que l'on notera h_s.
3. Exprimer Q en fonction de h, h_s, l et g. Pour $l = h_\mathrm{s} = 1m$, tracer la courbe $Q(h)$.
4. Déterminer la valeur maximale $Q_{\max}$ de Q et la hauteur critique h_c correspondante.
5. Montrer que pour une valeur de débit inférieure à $Q_{\max}$, il existe 2 valeurs possibles h_1 et h_2 de la hauteur h avec $h_1 < h_\mathrm{c} < h_2$.
Rqe : h_1 correspond au régime torrentiel et h_2 correspond au régime fluvial.
6. Des pertubations de la surface libre peuvent se propager à la vitesse $\sqrt{gh}$ par rapport à l'eau. Ces pertubations peuvent-elles remonter vers l'amont ?