E.S.T.P
ME1

Projet d'Hydrodynamique.

P. Sochala

A rendre impérativement pour le 07/12/09

A effectuer en binôme

02/11/09

Présentation

Nous proposons d'étudier les écoulements lents vis-à-vis d'une rotation d'ensemble comme les écoulements atmosphériques, océaniques ou certains écoulements industriels. Dans ces cas, il est commode d'écrire l'équation du mouvement dans le référentiel tournant (non galiléen) à une vitesse angulaire constante $\Omega \overset{\text{def}}{=} \omega e_z$. Nous désignons par R un repère fixe et par R' un repère lié au mouvement du fluide.

Partie 1 : questions préliminaires (3 points)

On se propose dans cette partie préliminaire d'étudier quelques notions relatives aux mouvements en rotation ayant une vitesse angulaire constante Ω.

1. Donner la loi de dérivation vectorielle pour un vecteur quelconque permettant de changer de référentiel. En déduire la relation entre les vitesses absolue et relative ainsi que celle entre les accélérations absolue et relative.
2. Donner la signification physique des différents termes de l'accélération absolue.
3. Dans quelle direction la force de Coriolis a t-elle tendance à dévier l'écoulement d'un fluide ? Quel sens de rotation attendrait-on pour le tourbillon de vidange d'un évier dans chaque hémisphère ? Cet effet est-il observable ?

Partie 2 : équations en référentiel tournant (5 points)

L'objectif de cette deuxième partie est d'étudier les équations qui régissent les écoulements dans un référentiel tournant.

4. Ecrire l'équation de Navier–Stokes dans un référentiel tournant et donner la signification physique des différents termes de l'équation.
5. Sous quelles hypothèses l'équation de Navier–Stokes écrite précédemment peut s'écrire
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p' - 2\Omega \wedge v + \nu \Delta v,$$
où le terme p' est une quantité à préciser. On utilisera que $(\Omega \wedge \Omega \wedge u = -\frac{1}{2}\nabla(\Omega \wedge u)^2)$.
6. Effectuer l'adimensionnalisation de cette équation quand l'écoulement est permanent. Montrer que le nombre de Rossby R_o et le nombre d'Ekman E_k définis par
$$R_\mathrm{o} \overset{\text{def}}{=} \frac{V}{\omega L} \quad \text{et} \quad E_\mathrm{k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\nu}{\omega L^2},$$
apparaissent. Les quantités V et L sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques de l'écoulement.
7. Donner un ordre de grandeur des nombres de Rossby et d'Ekman à l'échelle de la Terre.

Partie 3 : écoulements géostrophiques (4 points)

On étudie dans cette partie les écoulements géostrophiques qui sont des écoulements permanents dans lesquels les effets des termes d'advection et de diffusion peuvent être négligés devant ceux de la force de Coriolis.

8. Que valent les nombres de Rossby et d'Ekman sous ces hypothèse ?
   Donner l'équation obtenue.

9. Comment sont les lignes de courant et les isobares ? Interpréter.

On s'intéresse particulièrement à un écoulement géostrophique uniforme dans la direction e_x de sorte que l'on suppose que le champ de vitesse est de la forme $v = v_0 e_x$ où v_x est constant.

10. Ecrire les trois composantes de l'équation obtenue à la question 8 dans ce cas particulier.

Partie 4 : couche limite (8 points)

On étudie dans cette dernière partie la couche de raccordement entre une zone d'écoulement géostrophique et une zone où la viscosité ne peut pas être négligée. Les hypothèses précédentes restent valables mais la viscosité doit maintenant être prise en compte. Dans cette couche, on cherche un champ de vitesse de la forme $v = v_x(z)e_x + v_y(z)e_y$ où les conditions aux limites sont

$$v_x(0) = v_y(0) = 0, \quad \lim_{z\to\infty} v_x(z) = v_0 \quad \text{et} \quad \lim_{z\to\infty} v_y(z) = 0.$$

11. Ecrire les trois composantes de l'équation obtenue dans ce cas particulier.

12. Montrer que le champ de vitesse dans la couche limite doit vérifier le système couplé

$$\begin{cases} \nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -2\omega v_y, \\ \nu \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = 2\omega (v_x - v_0). \end{cases}$$

13. Donner et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $Z \overset{\text{def}}{=} \dfrac{v_x + i v_y}{v_0}$.

14. En déduire les expressions de v_x et v_y.

15. Représenter $\dfrac{v_x}{v_0}$ et $\dfrac{v_y}{v_0}$ en fonction de $z\sqrt{\dfrac{\omega}{\nu}}$.

16. Représenter le diagramme polaire du vecteur vitesse dans la couche limite.