E.S.T.P
ME1

Application d'Hydrodynamique n°2.

P. Sochala

13/12/10

Exercice 1 (3 points)

Nous souhaitons mesurer la viscosité dynamique μ d'une huile en la faisant couler dans un tube horizontal de diamètre D avec un débit volumique Q. Deux tubes manométriques verticaux, placés sur la conduite et espacés d'une longueur L, indiquent une dénivellation δh de l'huile. Les données sont

$$D = 7mm, \quad Q = 4\ 10^{-6} m^3 s^{-1}, \quad L = 60cm, \quad \delta h = 267mm \quad \text{et} \quad \rho = 910 kgm^{-3}.$$

Nous supposons que l'écoulement est laminaire.

1. Donner l'expression de la viscosité dynamique de l'huile. Application numérique.
2. L'hypothèse initiale est-elle correcte ?
3. Proposer une autre méthode pour déterminer μ.

Exercice 2 (5 points)

Une pompe p de puissance $\mathcal{P}$ remonte de l'eau d'un bassin vers un réservoir à travers une conduite comme indiqué sur le schéma de l'installation. L et D désignent la longueur (du bassin à la pompe et de la pompe au réservoir) et le diamètre de la conduite circulaire, v est la vitesse de l'eau dans la conduite et μ est la viscosité dynamique de l'eau. Les pertes de charge singulières sont négligées.

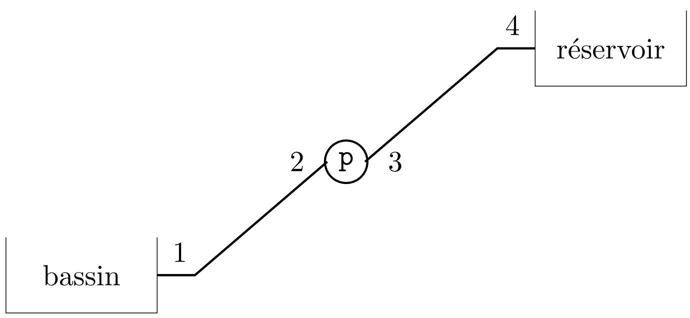

Fig. 1 – schéma de l'installation.

Les données sont

$$\mathcal{P} = 36kW, \quad D = 135mm, \quad v = 6ms^{-1}, \quad \mu = 10^{-3} Pas, \quad L = 65m$$

$$p_1 = p_4 = 1013mbar, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = z_3 = 20m \quad \text{et} \quad z_4 = 35m.$$

1. Quel est le régime d'écoulement ?
2. Quelle est la relation entre $\mathcal{P}$, Q et la différence de pression $\delta p_{\mathcal{P}}$ entre la sortie et l'entrée de la pompe ?
3. Calculer les pertes de charge linéaire entre le bassin et le réservoir. Application numérique.
4. Calculer le coefficient de perte de charge linéaire dans la conduite. Application numérique.

Exercice 3 (7 points)

Nous proposons d'étudier un écoulement à surface libre régi par les équations suivantes

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hv}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad g\sin(\alpha) = \frac{C_f}{2}\frac{v|v|}{h},$$

où h est la hauteur de la surface libre, v la vitesse de l'écoulement, α la pente du sol et C_f le coefficient de frottement. On suppose que (h_n, v_n) est une solution constante du modèle et l'on s'intéresse aux solutions de la forme

$$h(x,t) = h_n + \tilde{h}(x,t) \quad \text{et} \quad v(x,t) = v_n + \tilde{v}(x,t),$$

avec $\tilde{h} \ll h_n$ et $\tilde{v} \ll v_n$.

1. Ecrire les équations linéarisées vérifiées par $\tilde{h}$ et $\tilde{v}$ en supposant $v_n > 0$.
2. Calculer le rapport $\tilde{v}/v_n$ en fonction du rapport $\tilde{h}/h_n$.
3. En déduire que l'on peut éliminer $\tilde{v}$ pour ne conserver qu'une seule équation en $\tilde{h}$.
4. Soit la condition initiale $h(x,0) = h_n + \tilde{h}_1(1 - \tanh(kx))$.

   Montrer que l'on doit choisir la condition en vitesse sous la forme

   $$v(x,0) = \kappa h_n^{1/2} + \frac{1}{2}\kappa h_n^{-1/2}\tilde{h}_1(1 - \tanh(kx))$$

   avec κ dépendant de C_f, α et g.
5. En déduire la solution $h(x,t)$ issue de ces conditions initiales.
6. Quelle est la vitesse de propagation du profil initial ?
   Ce profil initial se déforme t'il au cours du temps ?

   Indication : la solution $u(x,t)$ du système

   $$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

   est $u(x,t) = u_0(x - ct)$ d'après la méthode des caractéristiques.

Exercice 4 (5 points)

Considérons un canal dont le lit a une pente I de $5cm$ par kilomètre. La section est rectangulaire de largeur $l = 70m$ et de débit $Q = 15m^3s^{-1}$. L'écoulement est uniforme et la valeur du coefficient de Manning–Strickler $\mathcal{K}_s$ est de 58.

1. Donner l'unité du coefficient de Manning–Strickler. Justifier
2. Calculer la hauteur critique et la hauteur normale.
3. Déterminer le type de régime.
4. Calculer la contrainte de frottement et la pression au fond. Conclure