E.S.T.P
ME1

Projet d'Hydrodynamique.

03/11/10

P. Sochala

A rendre pour le 06/12/10

A effectuer en binôme

Présentation

Nous proposons d'étudier la sédimentation d'une micro-particule sphérique de rayon R dont le centre reste immobile par rapport à un repère fixe et qui tourne sur elle-même à une vitesse angulaire constante $\vec{\Omega} = \Omega e_z$. Cette micro-particule est plongée dans un écoulement visqueux incompressible de vitesse uniforme v_0 et de pression p_0 à l'infini.

En notant ρ la masse volumique du fluide et μ sa viscosité dynamique, l'objectif du problème est de déterminer les efforts (force et moment) exercés par le fluide sur la sphère lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est petit devant l'unité.

L'écoulement est stationnaire et la gravité est négligée dans les parties 1 à 3. On pose $\mathrm{x} = (x, y, z)^{\mathrm{t}}$ et $\mathrm{v} = (\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y, \mathrm{v}_z)^{\mathrm{t}}$.

Partie 1 : approximation de Stokes (3 points)

Cette partie préliminaire permet de formuler le problème.

1. Donner les équations et les conditions aux limites du problème
2. En posant
$$\mathrm{x} = R\mathrm{x}^*, \quad \mathrm{v} = ||\mathrm{v}_0||\mathrm{v}^*, \quad p = p_0 + \frac{\mu||\mathrm{v}_0||}{R}p^*, \quad \mathrm{v}_0 = ||\mathrm{v}_0||\mathrm{v}_0^* \quad \text{et} \quad \vec{\Omega} = \frac{||\mathrm{v}_0||}{R}\vec{\Omega}^*,$$
écrire les équations et les conditions aux limites du problème sous forme adimensionnelle.
3. En omettant l'exposant * pour alléger les notations, montrer que le problème s'écrit à bas nombre de Reynolds
$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \nabla p = \Delta \mathrm{v} \\ div(\mathrm{v}) = 0 \\ \mathrm{v}(\mathrm{x}) = \vec{\Omega} \wedge \mathrm{x} \quad \text{en } ||\mathrm{x}|| = 1 \\ \lim_{||\mathrm{x}|| \to \infty} \mathrm{v}(\mathrm{x}) = \mathrm{v}_0 \\ \lim_{||\mathrm{x}|| \to \infty} p(\mathrm{x}) = 0 \end{cases}$$

Soit (v_1, p_1) et (v_2, p_2) les solutions des problèmes
$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{cases} \nabla p_1 = \Delta \mathrm{v}_1 \\ div(\mathrm{v}_1) = 0 \\ \mathrm{v}_1(\mathrm{x}) = \vec{\Omega} \wedge x \quad \text{en } ||\mathrm{x}|| = 1 \\ \lim_{||\mathrm{x}|| \to \infty} \mathrm{v}_1(\mathrm{x}) = 0 \\ \lim_{||\mathrm{x}|| \to \infty} p_1(\mathrm{x}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_2) \quad \begin{cases} \nabla p_2 = \Delta \mathrm{v}_2 \\ div(\mathrm{v}_2) = 0 \\ \mathrm{v}_2(\mathrm{x}) = 0 \quad \text{en } ||\mathrm{x}|| = 1 \\ \lim_{||\mathrm{x}|| \to \infty} \mathrm{v}_2(\mathrm{x}) = \mathrm{v}_0 \\ \lim_{||\mathrm{x}|| \to \infty} p_2(\mathrm{x}) = 0 \end{cases}$$

4. A quoi correspondent les problèmes $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$?
Que satisfont les champs $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2$ et $p_1 + p_2$?

Partie 2 : résolution du problème $(\mathcal{P}_1)$ (5 points)

L'objectif de cette deuxième partie est de résoudre le problème $(\mathcal{P}_1)$ qui est aisément résolvable en coordonnées sphériques en alignant l'axe polaire (Oz) avec l'axe de rotation de la sphère : $\vec{\Omega} = \omega e_z$. Ainsi $\vec{\Omega} \wedge x = \omega e_z \wedge r e_r = r\omega \sin\theta e_\varphi$

5. En cherchant la solution sous la forme $\mathrm{v}_1(r,\theta,\varphi) = l(r)\sin(\theta)e_\varphi$ et $p_1(r,\theta,\varphi) = 0$, déterminer l'équation différentielle satisfaite par la fonction $l(r)$.
6. Résoudre cette équation en posant $r = e^s$ et $L(s) = l(e^s)$.
7. Montrer que la solution s'écrit sous forme dimensionnelle :

$$\mathrm{v}_1 = \Omega \frac{R^3}{r^2}\sin(\theta)e_\varphi \quad \text{et} \quad p_1 = p_0.$$

8. Soient σ_1 le tenseur des contraintes associé à l'écoulement de pression p_1 et de vitesse v_1 et $T_1 = (\sigma_1 n)|_{\mathcal{S}}$ la contrainte exercée par le fluide sur la surface $\mathcal{S}$ de la sphère. Montrer que

$$T_1 = -p_0 e_r - \alpha\mu\Omega\sin(\theta)e_\varphi$$

   avec α constante numérique à déterminer.
9. Calculer la résultante F_1 des efforts de pression et le moment M_1 en O des efforts de pression exercés sur la sphère :

$$F_1 = \int_{\mathcal{S}} T_1 dS \quad \text{et} \quad M_1(O) = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{x} \wedge T_1 dS.$$

Partie 3 : résolution du problème $(\mathcal{P}_2)$ (9 points)

L'objectif de cette troisième partie est de résoudre le problème $(\mathcal{P}_2)$ qui sera cherchée en coordonnées cartésiennes. On notera $r = ||\mathrm{x}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $n = \dfrac{\mathrm{x}}{r}$.

10. Montrer que $\nabla\left(\dfrac{1}{r^m}\right) = -\dfrac{m\mathrm{x}}{r^{m+2}}$ pour tout $m \neq 0$
11. Soit $f = \dfrac{1}{r}$. Calculer $g = \nabla f$ et $h = \nabla g$.

    Indication : utiliser la relation $\nabla(sG) = s\nabla G + G \otimes \nabla s$, avec s champ scalaire et G champ vectoriel.
12. Montrer que f, g et h sont des fonctions harmoniques.
13. Montrer que la pression p_2 est harmonique et vérifier qu'elle peut être choisie sous la forme

$$p_2(\mathrm{x}) = Ag(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{v}_0,$$

    où A est une constante indéterminée pour le moment.
14. Pour obtenir le champ de vitesse, on pose

$$\mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_0 + \frac{1}{2}p_2(\mathrm{x})\mathrm{x} + w(\mathrm{x}).$$

Montrer que le problème vérifier par $w(\mathrm{x})$ est

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \Delta w = 0 \\ div(w) = \frac{1}{2}A\frac{\mathrm{v}_0 \cdot \mathrm{x}}{r^3} \\ w(\mathrm{x}) = -\mathrm{v}_0 + \frac{1}{2}A\mathrm{v}_0 \cdot nn \quad \text{en } ||\mathrm{x}|| = 1 \\ \lim_{||\mathrm{x}|| \to \infty} w(\mathrm{x}) = 0 \end{cases}$$

Indication : utiliser les relations

- $\Delta(sG) = s\Delta G + G\Delta s + 2\nabla G \nabla s$,
- $div(sG) = sdiv(G) + G \cdot \nabla s$,
- $\nabla(G \cdot H) = (\nabla G)^{\mathrm{t}} H + (\nabla H)^{\mathrm{t}} G$,
- $\mathrm{x} \otimes \mathrm{x}\mathrm{v}_0 = \mathrm{x}\mathrm{x} \cdot \mathrm{v}_0$,

avec s champ scalaire et G, H champs vectoriels

15. Expliquer pourquoi on peut poser

$$w(\mathrm{x}) = Bf(\mathrm{x})\mathrm{v}_0 + Ch(\mathrm{x})\mathrm{v}_0.$$

Déterminer les constantes A, B, C et montrer que les champs de vitesse et de pression s'écrivent sous forme dimensionnelle

$$v_2 = \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right)\mathrm{v}_0 - \frac{3R}{4r}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\mathrm{v}_0 \cdot nn \quad \text{et} \quad p_2 = -\frac{3\mu R}{2r^2}\mathrm{v}_0 \cdot n.$$

Indication : utiliser les relations

- $div(TG) = T : \nabla G + G \cdot div(T)$ avec G champ vectoriel et T champ tensoriel
- $\mathrm{x} \otimes \mathrm{x}\mathrm{v}_0 = \mathrm{v}_0 \cdot \mathrm{x}\mathrm{x}$.

16. Montrer que le gradient de vitesse ∇v_2 s'écrit sur la surface $\mathcal{S}$ de la sphère

$$\nabla v_2|_{\mathcal{S}} = \frac{3}{2R}\left(\mathrm{v}_0 \otimes n - (\mathrm{v}_0 \cdot n)n \otimes n\right).$$

Indication : utiliser la relation $\nabla(sG) = s\nabla G + G \otimes \nabla s$, avec s champ scalaire et G champ vectoriel.

17. Soient σ_2 le tenseur des contraintes associé à l'écoulement de pression p_2 et de vitesse v_2 et $T_2 = (\sigma_2 n)|_{\mathcal{S}}$ la contrainte exercée par le fluide sur la surface $\mathcal{S}$ de la sphère ($n = e_r$). Montrer que

$$T_2 = \beta\frac{\mu}{R}\mathrm{v}_0,$$

avec β constante numérique à déterminer.

18. Calculer la résultante F_2 des efforts de pression et le moment M_2 en O des efforts de pression exercés sur la sphère :

$$F_2 = \int_{\mathcal{S}} T_2 dS \quad \text{et} \quad M_2(O) = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{x} \wedge T_2 dS.$$

Partie 4 : Vitesse de sédimentation (3 points)

Une micro-particule de masse M et d'inertie I est animée d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire Ω et de translation de vitesse v dans un fluide au repos à l'infini. Le nombre de Reynolds de l'écoulement restant faible et les mouvements très lents, l'écoulement autour de la sphère est quasiment stationnaire. On note ρ_s et ρ_s les masses volumiques de la sphère et du fluide.

19. Exprimer les efforts exercés par l'écoulement sur la sphère.
20. Déterminer la vitesse $v(t)$ et la rotation $\Omega(t)$ de la particule en fonction des valeurs initiales v_0 et Ω_0.
    Indication : utiliser le principe fondamental de la dynamique en translation et le principe fondamental de la dynamique en rotation (le moment d'inertie d'une sphère homogène autour d'un axe passant par son centre est $\frac{2}{5}MR^2$)
21. Exprimer la vitesse de sédimentation
    $$v_\infty = \lim_{t \to \infty} v(t).$$
22. Application numérique : calculer la vitesse de sédimentation et le nombre de Reynolds pour un grain de sable de rayon $R = 0.05mm$ et de masse volumique $1500kg.m^{-3}$ sédimentant dans l'eau ($\mu = 10^{-3}Pas$). Commenter.

Formulaire en coordonnées sphériques

Equation de continuité

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \mathrm{v}_r) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(\mathrm{v}_\theta \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial \varphi}\right) = 0$$

Equation de Navier-Stokes

– composante e_r

$$\frac{d\mathrm{v}_r}{dt} - \frac{\mathrm{v}_\theta^2}{r} - \frac{\mathrm{v}_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \nu\left(\Delta \mathrm{v}_r - \frac{2\mathrm{v}_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(\mathrm{v}_\theta \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial \varphi}\right)\right)$$

– composante e_θ

$$\frac{d\mathrm{v}_\theta}{dt} + \frac{\mathrm{v}_r\mathrm{v}_\theta}{r} - \frac{\mathrm{v}_\varphi^2}{r\tan(\theta)} + \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \nu\left(\Delta \mathrm{v}_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{v}_\theta}{r^2\sin^2(\theta)} - \frac{2\cos(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial \varphi}\right)$$

– composante e_φ

$$\frac{d\mathrm{v}_\varphi}{dt} + \frac{\mathrm{v}_r\mathrm{v}_\varphi}{r} + \frac{\mathrm{v}_\theta\mathrm{v}_\varphi}{r\tan(\theta)} + \frac{1}{\rho r\sin(\theta)}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \nu\left(\Delta \mathrm{v}_\varphi + \frac{2}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \varphi} + \frac{2\cos(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial \mathrm{v}_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\mathrm{v}_\varphi}{r^2\sin^2(\theta)}\right)$$

Laplacien

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Gradient de vitesse

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{v}_\theta}{r} & \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \varphi} - \frac{\mathrm{v}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial \mathrm{v}_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathrm{v}_r}{r} & \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial \mathrm{v}_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\mathrm{v}_\varphi}{r\tan(\theta)} \\ \frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial \mathrm{v}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\mathrm{v}_r}{r} + \frac{\mathrm{v}_\theta}{r\tan(\theta)} \end{pmatrix}$$