E.S.T.P
ME1

Application d'Hydrodynamique n°1.

P. Sochala

20/12/11

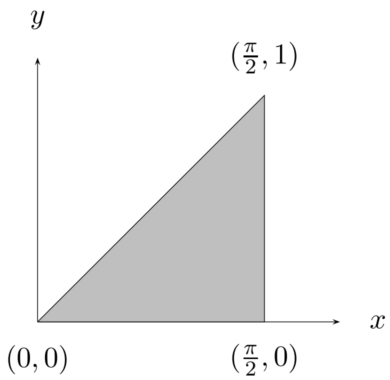
Exercice 1 (6 points)

Nous souhaitons vérifier le théorème de Stokes

$$\int_{\mathcal{S}} rot(v)\cdot n\ dS = \oint_{\partial\mathcal{S}} v\cdot t\ dl,$$

sur le triangle rectangle grisé $\mathcal{S}$ ci-dessous avec le champ de vitesse suivant

$$v = \begin{pmatrix} y - \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix}.$$



1. Déterminer $rot(v)\cdot n$ où n est la normale extérieure sortante à $\mathcal{S}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} rot(v)\cdot n\ dS$.
3. Donner le vecteur t des différentes parties de $\partial\mathcal{S}$.
4. Calculer $\displaystyle\oint_{\partial\mathcal{S}} v\cdot t\ dl$.

Exercice 2 (6 points)

Nous voulons étudier l'effet de la compressibilité sur le champ de pression en considérant un liquide au repos soumis uniquement à la gravité. La masse volumique et la pression à la surface sont notées ρ_0 et p_0.Nous ferons les applications numériques avec les valeurs suivantes

$$\rho_0 = 1000kg.m^{-3},\ P_0 = 1bar,\ g = 9.81m.s^{-2} \text{ et } \quad \chi_T = 4,410^{-10}Pa^{-1}.$$

La profondeur maximale $8605m$ considérée est celle de de l'océan Atlantique atteinte près de la fosse de Milwakee.

1. Déterminer le champ de pression p lorsque la masse volumique ρ est constante.
2. Exprimer la masse volumique ρ en fonction de ρ_0, p_0, p et de la compressibilité isotherme χ_T donnée par
$$\chi_T = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}\bigg|_T.$$

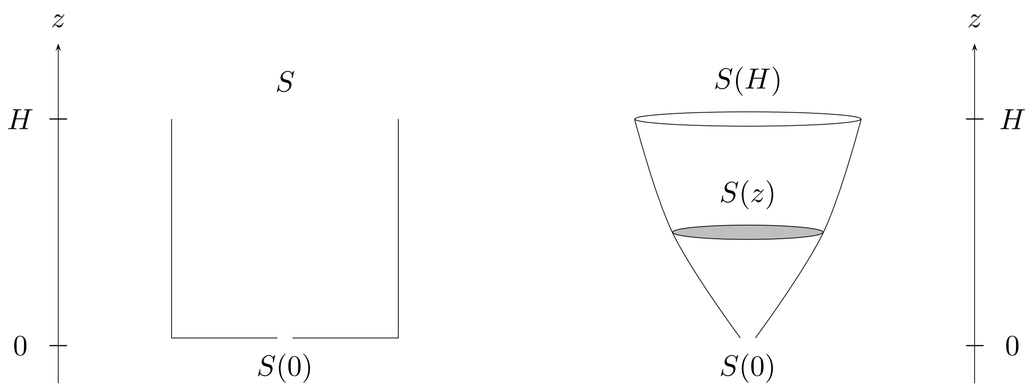
3. Linéariser la masse volumique obtenue ($\exp(x) \simeq 1 + x$ si $x \ll 1$).
4. Montrer que le champ de pression $\tilde{p}$ lorsque la masse volumique ρ est variable s'écrit

$$\tilde{p} = p_0 + \frac{1}{\chi_T}(e^{\rho_0 g \chi_T z} - 1).$$

   Quelle hypothèse permet d'obtenir cette expression ? est-ce pertinent ?
5. Calculer les pressions p et $\tilde{p}$ au fond de la fosse de Milwakee.
6. Calculer l'erreur relative commise en supposant le fluide incompressible.

Exercice 3 (8 points)

Un récipient de section constante S est percé à la base d'un petit orifice (figure de gauche). La hauteur initiale dans le récipient est H. L'écoulement est stationnaire, irrotationnel et incompressible. L'application numérique (question 3) concerne un récipient ayant une symétrie de révolution autour de l'axe Oz. Le diamètre au sommet vaut $D = 60cm$ et celui de l'orifice $d = 1mm$. La hauteur d'eau initiale est de $H = 50cm$. Le récipient est considéré à section variable (figure de droite) uniquement pour la question 4.



Récipient à section constante   Récipient à section variable

1. Montrer que la hauteur d'eau dans le récipient $h(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\left[\left(\frac{S}{S(0)}\right)^2 - 1\right]\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = 2gh(t).$$

2. Résoudre cette équation et tracer $h(t)$ lorsque $S \gg S(0)$.
3. Combien de temps faut-il pour vider entièrement le récipient ? Pour le vider à moitié ?
4. Quelle doit-être la forme du récipient $S(z)$ pour que la hauteur soit une fonction affine du temps (clepsydre) ?