E.S.T.P
ME1

Application d'Hydrodynamique n°2.

16/01/12

P. Sochala

Exercice 1 (6 points)

La formule de Colebrook est une relation entre le coefficient de perte de charge λ, le nombre de Reynolds R_e, la rugosité absolue ϵ et le diamètre intérieur D d'une conduite,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{2.51}{R_e\sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3.7D}\right).$$

Un réseau de distribution d'eau est assuré par une conduite en acier inoxydable de diamètre extérieur $6,3cm$ et d'épaisseur $3,2mm$. Le débit imposé est de $15m^3$ par heure.

1. Comme se simplifie la formule de Colebrook lorsque la conduite est lisse ?
2. Donner la pression dynamique (*i.e.* engendrée par le champ de vitesse) de l'écoulement.
3. Calculer λ par itérations successives (méthode de point fixe) avec $\lambda^{(0)} = 10^{-2}$.
4. Donner le coefficient de perte de charge en utilisant le diagramme de Moody lorsque

$$\frac{\epsilon}{3.7D} = \frac{1}{10}\frac{2.51}{R_e\sqrt{\lambda}}$$

5. L'hypothèse de conduite lisse est-elle valable ?

Indication Q3 : on s'arrêtera lorsque $|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k+1)}| < 10^{-3}$

Exercice 2 (7 points)

Nous souhaitons étudier un écoulement laminaire dans une conduite circulaire horizontale de longueur L et de rayon R soumis à une différence de pression δp entre l'entrée et la sortie de cette conduite. Le fluide est incompressible, l'écoulement permanent et les forces de pesanteur négligeables. Nous précisons que la *résistance hydraulique* R_h désigne le coefficient de proportionnalité reliant la chute de pression δp et le débit Q dans la conduite,

$$\delta p = R_h Q.$$

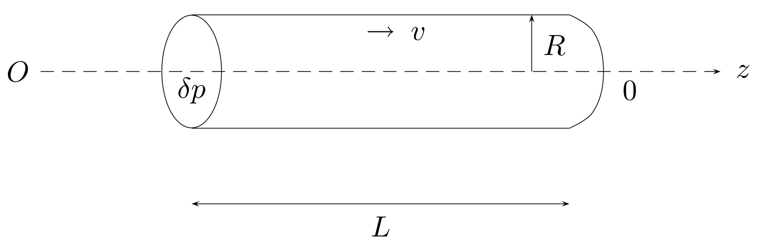

FIG. 1 – Ecoulement dans une conduite circulaire.

1. Justifier l'expression du champ de vitesse $v = v(r)e_z$.
2. Donner l'équation régissant cet écoulement.
3. Calculer et représenter v.

4. En déduire la vitesse moyenne v_{moy} dans une section droite.
5. Donner la résistance hydraulique $R_{\mathrm{h}}(\mu, L, R)$ de cet écoulement.

Nous souhaitons associer deux conduites de résistances respectives $R_{\mathrm{h},1}$ et $R_{\mathrm{h},2}$ et déterminer la résistance totale $R_{\mathrm{h},1+2}$ obtenue.

6. Donner la résistance $R^{\mathrm{s}}_{\mathrm{h},1+2}(R_{\mathrm{h},1}, R_{\mathrm{h},2})$ issue d'une association en série.
7. Donner la résistance $R^{\mathrm{p}}_{\mathrm{h},1+2}(R_{\mathrm{h},1}, R_{\mathrm{h},2})$ issue d'une association en parallèle.

Exercice 3 (7 points)

Nous souhaitons étudier un mascaret qui est un phénomène de surélévation de l'eau d'un fleuve provoquée par l'onde de la marée montante lors des grandes marées. Considérons pour cela un canal à fond plat de section rectangulaire de largeur $L = 50m$ supposée grande devant la profondeur. La hauteur initiale à marée basse (*i.e.* à l'amont du mascaret) est $h_0 = 40cm$ et le débit est de $10m^3/s$. La hauteur et la vitesse de l'écoulement à l'aval du mascaret sont notées h_1 et v_1. La vitesse du mascaret est notée $w = -2.5m/s$. La dynamique du mascaret est régie par les deux relations de saut suivantes

$$[\![h(v-w)]\!] = 0 \quad \text{et} \quad [\![hv(v-w) + \frac{1}{2}gh^2]\!] = 0,$$

où $[\![f]\!]$ désigne la discontinuité de f entre les valeurs à droite et à gauche du mascaret.

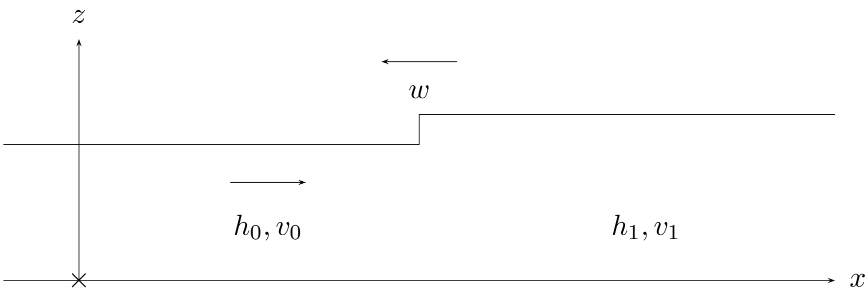

FIG. 2 – Schéma d'un mascaret remontant une rivière.

1. L'écoulement est-il fluvial ou torrentiel ? Justifier
2. Quel principe de conservation traduit la première relation de saut ? la deuxième ?
3. Développer les deux relations de sauts.
4. Montrer que l'égalité suivante est vérifiée

$$\frac{q_w^2}{h_0} + \frac{1}{2}gh_0^2 = \frac{q_w^2}{h_1} + \frac{1}{2}gh_1^2.$$

L'expression du débit linéique q_w dans le repère mobile lié au mascaret sera précisé.

5. Calculer q_w.
6. Choisir h_1 parmi $60cm, 70cm$ ou $80cm$. Justifier
7. En déduire v_1.

Formulaire en coordonnées cylindriques

Equation de continuité

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

Equation de Navier-Stokes

- composante radiale r

$$\rho\Big(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta^2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\Big)+\frac{\partial p}{\partial r}=F_r+\mu\Big(\frac{\partial}{\partial r}\big(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}\big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\Big)$$

- composante azimutale θ

$$\rho\Big(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\Big)+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=F_\theta+\mu\Big(\frac{\partial}{\partial r}\big(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}\big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\Big)$$

- composante axiale z

$$\rho\Big(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\Big)+\frac{\partial p}{\partial z}=F_z+\mu\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\Big)$$