E.S.T.P
ME1

Projet d'Hydrodynamique.

P. Sochala

A rendre pour le 06/01/12

A effectuer en binôme

09/12/11

Présentation

Ce problème a pour objectif d'étudier l'évolution d'un tourbillon dans un fluide incompressible remplissant tout l'espace uniquement soumis à la pesanteur. Nous introduisons les notations suivantes

- v désigne le champ de vitesse,
- ρ est la masse volumique,
- ν est la viscosité cinématique,
- $\omega \overset{\text{def}}{=} rot(v)$ représente la vorticité.

L'équation de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho F - \nabla p + \rho \nu \Delta v,$$

où F désigne l'ensemble des forces extérieures massiques.

Les champs de vitesse v et de vorticité ω sont supposés assez réguliers pour permuter leurs dérivées partielles.

Partie 1 : Formulation du Problème (4 points)

Cette partie préliminaire permet de formuler le problème.

1. Démontrer les deux identités

$$v \cdot \nabla v = \frac{1}{2} \nabla v^2 + rot(v) \wedge v,$$

$$rot(u \wedge v) = div(v)u - div(u)v + v \cdot \nabla u - u \cdot \nabla v.$$

2. Montrer que l'équation de Navier–Stokes peut se réécrire

$$\frac{\partial v}{\partial t} + rot(v) \wedge v + \nabla f = \nu \Delta v,$$

où f est une fonction à préciser.

3. Montrer que la vorticité ω vérifie les deux équations

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla v + \nu \Delta \omega \quad \text{et} \quad div(\omega) = 0.$$

Partie 2 : Mécanisme d'étirement (8 points)

• écoulement stationnaire

Nous considérons le champ de vitesse suivant en coordonnées cartésiennes,

$$v = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \gamma z \end{pmatrix},$$

où $\gamma > 0$ est une constante.

4. Exprimez α en fonction de γ pour que l'écoulement soit incompressible puis calculer ω.

Soit $\mathrm{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^{\mathrm{t}}$ la position d'une particule à l'instant initial.

5. Déterminer sa position à l'instant t.
6. Donner l'allure des trajectoires dans les trois cas suivants :
   1) $z_0 = 0$, 2) $x_0 = y_0 = 0$, 3) cas général.
7. Donner l'évolution d'un vecteur matériel initialement vertical.
8. Exprimer le champ de vitesse en coordonnées cylindriques (r, θ, z).

• écoulement instationnaire

Nous considérons le champ de vitesse suivant en coordonnées cylindriques,

$$v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\gamma r \\ v_\theta(r,t) \\ \gamma z \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, la composante verticale de l'équation vérifiée par le vorticité s'écrit

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\gamma r}{2}\frac{\partial \omega}{\partial r} = \gamma \omega + \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \omega}{\partial r}\right). \tag{1}$$

9. Déterminer la solution de (1) si $v_\theta(r,t) = r f(t)$.
   Comparer avec la question 7.
10. Donner le champ de vitesse et décrire le mouvement du fluide.

Partie 3 : Effet de la diffusion (8 points)

Nous cherchons maintenant une solution exacte de l'équation (1) sous la forme,

$$\omega(r,t) = f(r,t)e^{\gamma t}.$$

11. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par f.
12. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $F(\xi, s) = f(r,t)$ avec le changement de variable suivant
$$\xi = r e^{\frac{1}{2}\gamma t} \quad \text{et} \quad s = \frac{e^{\gamma t} - 1}{\gamma}.$$
13. Vérifier que la fonction
$$F(\xi, s) = \frac{\kappa}{4\pi \nu s} e^{-\frac{\xi^2}{4\nu s}},$$
    où κ est une constante, satisfait cette équation.

14. En déduire l'expression de $\omega(r,t)$.
15. Comment se comporte la vorticité lorsque $t \to \infty$?
    Comparer avec le résultat de la question 9.
    Quelle solution est la plus réaliste ? (regarder les solutions lorsque $r \to \infty$)
16. A $t > 0$ fixé, donner l'expression de la vorticité lorsque $\gamma \to 0$
    Dans ce cas, comment se comporte la vorticité lorsque $t \to 0$? $t \to \infty$?
17. Résumer le rôle de l'étirement et celui de la diffusion sur l'évolution du tourbillon.

Formulaire

- **Rotationnel en coordonnées cylindriques**

$$rot(v) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)e_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)e_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)e_z.$$

- **Masse de Dirac**
  - masse de Dirac dans le plan :
  $$\delta(x,y) = \delta(x)\delta(y),$$
  où δ est la masse de Dirac dans $\mathbb{R}$.
  - masse de Dirac décentrée :
  $$\delta_d(x) = \delta(x-d) \quad \text{avec} \quad \delta_d(x) = \lim_{d \to 0} \frac{1}{d\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{d^2}}.$$