E.S.T.P
GME1

Hydrodynamique
Application n°1
P. Sochala

11/01/13

Exercice 1 - Transformations élémentaires

Nous considérons les trois champs de vitesse bidimensionnels stationnaires suivant

$$v_1 = \begin{pmatrix} x+3y \\ -3x+y \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2y \\ 4x \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler les transformations élémentaires que peut subir une particule fluide.
2. Expliciter ces déformations dans le cas des champs v_1, v_2 et v_3. Conclure.

Exercice 2 - Coefficients thermoélastiques

Trois coefficients thermoélastiques sont définis pour chaque fluide : le coefficient de dilatation isobare α, le coefficient d'augmentation de pression isochore β et le coefficient de compressibilité isotherme χ_T.

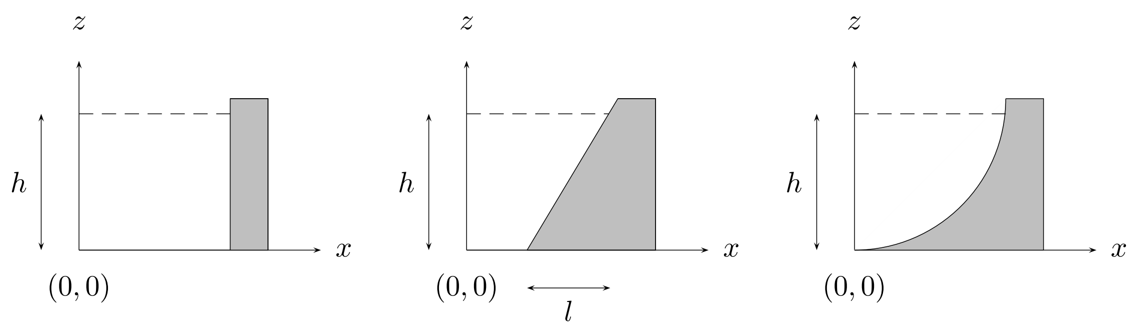
1. Donner les expressions générales de α, β et χ_T.
2. Déterminer α, β et χ_T dans le cas d'un gaz parfait. En déduire $\dfrac{\alpha}{\beta\chi_T}$.

Exercice 3 - Forces de pression sur un barrage

Nous souhaitons calculer la résultante des forces de pression sur des barrages de largeur b (suivant y) et de formes différentes dans le plan (Oxz). Nous considérons

- une section rectangulaire,
- une section trapézoïdale de base l immergée,
- une section parabolique décrite par l'équation $x^2 = \alpha z$.

La hauteur d'eau en $x = z = 0$ est notée h comme indiquée sur la figure ci-dessous.



Pour les trois barrages :

1. Calculer la composante horizontale de la résultante des forces pressantes.
2. Calculer la composante verticale de la résultante des forces pressantes.
3. Faire les applications numériques avec les valeurs suivantes

$$h = 32m, \quad b = 30m, \quad l = \alpha = 16m, \quad \rho = 1000kg.m^{-3} \quad \text{et} \quad g = 9.81m.s^{-1}.$$

Nous voulons désormais que la composante verticale de la résultante des forces pressantes soit identique pour les barrages à sections trapézoidale et parabolique.

4. Exprimer l en fonction de α pour que cette condition soit vérifiée. Application numérique.

Exercice 4 - Pression atmosphérique

Soit p la pression à l'altitude z dans l'air troposphérique à l'équilibre. L'air est assimilable à un gaz parfait et la masse volumique ne dépend que de l'altitude. M désigne la masse molaire. En $z = 0,\ p = p_0 = 1$ bar et $T = T_0 = 288K$. Les applications numériques (AN) se feront avec les données suivantes :

$$M = 29g \cdot mol^{-1} \quad g = 9.81m \cdot s^{-2}, \quad R = 8.31J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}, \quad a = 6.5^{\circ}C \cdot km^{-1}.$$

1. Reformuler la loi des gaz parfaits avec $T,\ p,\ \rho,\ M$ et toute autre constante nécessaire.
2. Etablir la relation $p(z)$ lorsque T et g sont uniformes.
3. Etablir la relation $p(z)$ lorsque $T = T_0 - az$ (a constant) et g est uniforme.
4. Déterminer dans les deux cas la hauteur d'échelle H vérifiant $\dfrac{p}{p_0} = \dfrac{1}{e}$. AN. Conclure.
5. Simplifier l'expression de $p(z)$ lorsque $T = T_0 - az$ si l'on suppose $z \ll \dfrac{T_0}{a}$.

Exercice 5 - Lance à incendie

Une lance à incendie a un diamètre d'entrée $D = 100mm$ et un diamètre d'ajutage (orifice de sortie) de $d = 25mm$. Cette lance est reliée à une pompe par un tuyau de diamètre constant $D = 100mm$. La pompe et la lance sont à la même altitude. Le débit est de $1000L \cdot min^{-1}$. On rappelle que la pression atmosphérique est $101325Pa$ et l'accélération de la pesanteur est $9.81m \cdot s^{-2}$.

1. Déterminer la pression minimale de l'eau en sortie de pompe.
2. Calculer la hauteur du jet lorsque la lance est tenue verticalement.

Exercice 6 - Potentiel complexe

Nous supposons un écoulement plan irrotationnel et considérons le potentiel complexe suivant

$$f(z) = z^2.$$

Les coordonnées x et y sont supposées positives.

1. Déterminer le potentiel des vitesses φ et la fonction de courant ψ.
2. En déduire les lignes de courant et les dessiner.
3. Montrer que les équipotentielles et les lignes de courant sont orthogonales.
4. Donner le champ de vitesse. Représenter le vecteur vitesse aux points $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$.
5. Quel est l'écoulement décrit par ce potentiel complexe ?
6. Vérifier que le mouvement est solénoïdal et irrotationnel.