E.S.T.P
GME1

Hydrodynamique
Application n°1
P. Sochala

25/11/13

Exercice 1 - Trajectoires et lignes de courant

Nous considérons les écoulements plans suivant

$$v_1 = \begin{pmatrix} u_0 + a(t - t_1) \\ v_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} x/(1+t) \\ 2y/(2+t) \end{pmatrix}.$$

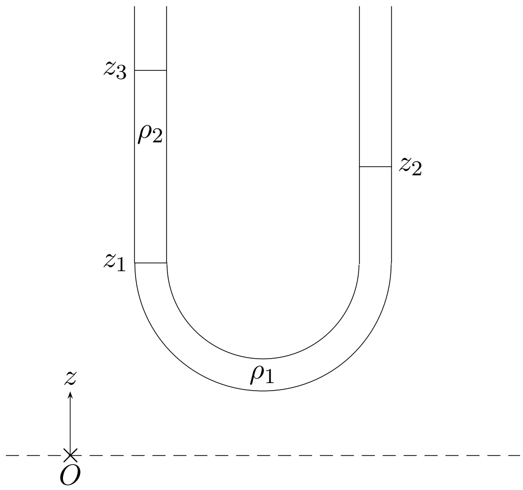
Pour chaque champ de vitesse,

1. Le mouvement est-il permanent ? solénoïdal ?
2. Donner l'équation des lignes de courant.
3. Déterminer la trajectoire de la particule passant par (x_0, y_0) à $t = 0$.

Exercice 2 - Mesure de densité

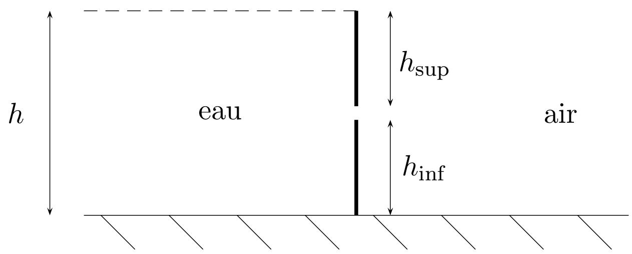
Deux fluides non miscibles sont versés dans un tube en U. A l'équilibre, ils sont disposés comme indiqué sur la figure ci-dessous.

1. Ecrire la relation entre z_1, z_2 et z_3.
2. En déduire une méthode de détermination de la densité d'un fluide.



Exercice 3 - Forces de pression

Un bassin contenant de l'eau sur une hauteur h est fermé par une porte verticale constituée de deux panneaux plans superposés de largeur l.



Nous souhaitons que chaque panneau supporte le même effort. La hauteur du panneau supérieur est notée h_{sup}, celle du panneau inférieur h_{inf} et les altitudes des centres de poussée sont notés λ_{sup} et λ_{inf}.

1. Le panneau inférieur est-il plus grand que le panneau supérieur ? Justifier
2. Déterminer les hauteurs h_{sup} et h_{inf}. AN pour $h = 3m$
3. Calculer les altitudes des centres de poussée de chaque panneau. AN pour $h = 3m$

Exercice 4 - Vidange

Un récipient hémisphérique de rayon R rempli d'un fluide incompressible présente un trou de section s à sa base (située à $z = 0$).

1. Donner l'expression du rayon $r(z)$ du rayon en fonction de l'altitude.
2. En déduire que le temps requis pour que le niveau du fluide passe de h_1 à h_2 est

$$t = \frac{\pi}{s}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\frac{1}{5}\left(h_2^{5/2} - h_1^{5/2}\right) - \frac{2}{3}R\left(h_2^{3/2} - h_1^{3/2}\right)\right).$$

Exercice 5 - Fluide compressible

Nous souhaitons établir le théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent de fluide compressible irrotationnel et adiabatique. La seule force est la gravité et nous supposons que le fluide vérifie la relation de Laplace

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C,$$

où p est la pression, ρ la masse volumique, γ l'indice d'adiabaticité et C une constante.

1. Etablir la relation entre ∇p et $\nabla \rho$ (en éliminant C).
2. En déduire $\nabla(p/\rho)$ en fonction de ∇p, ρ et γ.
3. En déduire l'équation d'Euler pour ce fluide.
4. Donner le théorème de Bernoulli obtenu. Conclure.

Exercice 6 - Potentiel complexe

Nous supposons un écoulement plan irrotationnel et considérons le potentiel complexe suivant

$$f(z) = kz^2.$$

La coordonnée y est supposée positive.

1. Déterminer le potentiel des vitesses φ et la fonction de courant ψ.
2. En déduire les équations des lignes de courant et en donner l'allure.
3. Montrer que les équipotentielles et les lignes de courant sont orthogonales.
4. Donner le champ de vitesse et la dimension de la constante k.
5. L'origine est-elle un point d'arrêt ?
6. Vérifier que le mouvement est solénoïdal et irrotationnel.
7. Quel est l'écoulement décrit par ce potentiel complexe ?
8. Peut-on imposer une condition d'adhérence en $y = 0$?