Exercice 1 - Mesure de viscosité

La vitesse dans un écoulement de Poiseuille (soumis à une différence de pression δp) dans un tube de rayon R et de longueur L est

$$v(r) = \frac{\delta p}{4\mu L}\big(R^2 - r^2\big),$$

où r est la distance à l'axe du tube et μ la viscosité dynamique. Pour mesurer la viscosité cinématique d'une huile, nous considérons un tel écoulement dans un tube incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal. La pression statique est supposée constante dans le tube. Les applications numériques se feront avec les valeurs suivantes

$$R = 6mm, \quad \sin(\alpha) = 0.0445, \quad Q = 20l \cdot h^{-1}, \quad g = 9.81m \cdot s^{-2}.$$

1. Déterminer le gradient de pression dans le tube.
2. Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement.
3. En déduire la viscosité cinématique de l'huile.

Exercice 2 - Calcul de perte de charge

On transvase du lait d'un camion citerne dans un réservoir de stockage avec une pompe de débit Q. La conduite d'alimentation a une longueur L, un diamètre D, une rugosité ϵ et comporte un robinet ainsi que quatre coudes arrondis d'angle α et de rayon de courbure r_c. Les expressions des pertes de charge du robinet et d'un coude sont

$$k_{\text{rob}} = 0.1 \quad \text{et} \quad k_{\text{coude}} = \big(0.13 + 1.85\,(D/2r_c)^{3.5}\big)(\alpha/90).$$

Les applications numériques se feront avec les valeurs suivantes

$$\rho_{\text{lait}} = 1032kg \cdot m^{-3}, \quad \nu_{\text{lait}} = 1.93\ 10^{-6}m^2 \cdot s^{-1}, \quad g = 9.81m \cdot s^{-2}, \quad p_{\text{atm}} = 10^5Pa,$$

$$Q = 340L \cdot min^{-1}, \quad L = 25m, \quad D = 6cm, \quad \epsilon = 0.06mm, \quad \alpha = 90^\circ, \quad r_c = 12cm.$$

1. Calculer la perte de charge linéaire de ce dispositif.
2. Calculer chaque perte de charge singulière.
3. En déduire la perte de charge totale (exprimée en m puis en Pa) dans la conduite.

Exercice 3 - Analyse dimensionnelle

La conservation de l'énergie (sans puissance mécanique) dans un fluide s'écrit

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + div(\rho e v) = r - div(q).$$

où e désigne l'énergie massique, r la puissance calorifique et q le flux thermique.

1. Donner les hypothèses permettant de reformuler l'équation d'énergie sous la forme

$$\rho c_{\mathrm{p}} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_{\mathrm{p}} v \cdot \nabla T = r + div(\lambda \nabla T), \tag{1}$$

   où c_{p} représente la capacité thermique massique, T la température et λ la conductivité thermique.
2. Donner les unités indépendantes intervenant dans (1).
   Combien de nombres sans dimension peut-on former ?
3. Ecrire la forme adimensionnelle de (1).
4. Expliciter les nombres sans dimension en faisant apparaître le coefficient 1 devant le terme advectif.

Exercice 4 - Equations de Reynols

Une description statistique de la turbulence conduit à l'équation de Reynolds,

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \overline{v} \cdot \nabla \overline{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \overline{p} = \overline{F} + \nu \Delta \overline{v} - div(\overline{v' \otimes v'}).$$

1. Que représentent $\overline{v}$ et v' ?
2. Montrer que l'équation de Reynolds pour la pression est

$$-\frac{1}{\rho} \Delta \overline{p} = div(\overline{v} \cdot \nabla \overline{v}) - div(\overline{F}) + div(div(\overline{v' \otimes v'})).$$

La vorticité $\omega \overset{\text{def}}{=} rot(v)$ d'un écoulement incompressible vérifie l'équation suivante

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla v + \nu \Delta \omega.$$

3. Montrer que l'équation de Reynolds pour la vorticité est

$$\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial t} + \overline{v} \cdot \nabla \overline{\omega} = \overline{\omega} \cdot \nabla \overline{v} + \nu \Delta \overline{\omega} + div(\overline{v' \otimes \omega'} - \overline{\omega' \otimes v'}).$$

Exercice 5 - Ecoulement dans un canal

On considère un canal de section droite rectangulaire de largeur $l = 2m$, de hauteur d'eau $h = 0.5m$ et de pente constante $I = 5.10^{-4}$. Le coefficient de Strickler du canal est $K_s = 60$ unités SI.

1. Quel est le débit Q pour un écoulement uniforme dans ce canal ?
2. Calculer la profondeur critique h_c pour le débit Q.
3. En déduire la nature de l'écoulement (fluvial ou torrentiel).

Ce canal comporte un rétrécissement au bout duquel la largeur devient $l' = 1.3m$. On suppose qu'il n'y a pas de pertes de charges à cet endroit c'est-à-dire que le rétrécissement est progressif.

4. Comment évolue la ligne d'eau à travers ce rétrécissement progressif ?
5. Calculer la hauteur d'eau h' à l'aval du rétrécissement pour le débit Q.