E.S.T.P
ME1

Composition d'Hydrodynamique.

22/01/14

P. Sochala

Aucun document autorisé.
Calculatrice de l'école autorisée.
2h30

Ce sujet comporte 4 pages.
Les deux questions de cours sont sur 6 pts.
Les trois exercices sont indépendants et sont sur 14 pts.

Questions de cours

• Le numéro n de la question à traiter est obtenu par la formule suivante

$$n = 1 + N_{\text{élève}} + X - 24 \times ENT\left(\frac{N_{\text{élève}} + X}{24}\right)$$

dans laquelle $N_{\text{élève}}$ est le ***<u>numéro d'élève attribué en début de scolarité</u>***,
X est un entier donné pour chaque question,
$ENT()$ désigne la partie entière.

• Exemple : Berlioz Margaux, $N_{\text{élève}} = 7541$ ($N_{\text{élève}} \neq 10$)
$X = 5$

$$n = 1 + 7541 + 5 - 24 \times ENT\left(\frac{7541 + 5}{24}\right) = 11$$

• Remarques : - les questions de cours sont données en Annexe,
- $N_{\text{élève}}$ n'est pas un numéro éventuel attribué à votre place pour la composition,
- ***<u>toute question ne devant pas être traitée ne sera pas corrigée</u>***.

Question 1 (3 points)

L'entier X pour cette question est 3.

Question 2 (3 points)

L'entier X pour cette question est 16.

Exercice 1 (2 points)

Nous proposons d'étudier l'expérience du « crève-tonneau » réalisée par Blaise Pascal en 1646 : un tonneau, rempli d'eau et surmonté d'un tube (initialement vide), explose lorsque de l'eau est ajoutée dans le tube. Les applications numériques se feront avec les valeurs suivantes

$$h_{\text{ton}} = 1m, \quad d_{\text{ton}} = 0.76m, \quad h_{\text{tub}} = 9m, \quad d_{\text{tub}} = 1cm, \quad g = 9.81m \cdot s^{-2},$$

où h_{ton} et d_{ton} (resp. h_{tub} et d_{tub}) sont les hauteur et diamètre du tonneau (resp. tube).

1. Calculer la pression au centre du tonneau et la force pressante au fond du tonneau lorsque le tube est vide.
2. Même question lorsque le tube est rempli d'eau. Conclure.

Exercice 2 (9 points)

Un réservoir de section S rempli d'eau se termine par un tube horizontal de longueur L et de section s ($\ll S$) situé à sa base comme illustré sur la figure 1. Le tube est fermé par un robinet que l'on ouvre à l'instant $t = 0$. La hauteur d'eau initiale dans le réservoir est h^0 et $h(t)$ à l'instant t. La vitesse dans le tube est notée $v(t)$.

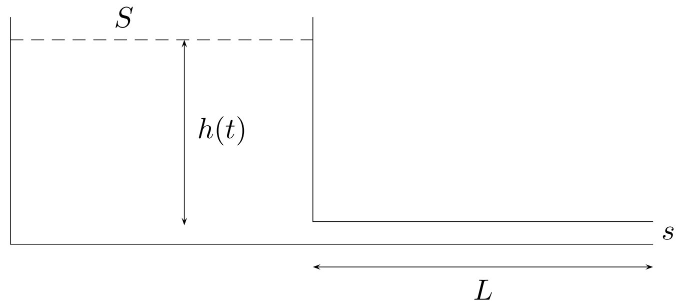

Figure 1 – Vidange d'un réservoir.

1. Pourquoi la vitesse de la surface libre du réservoir est négligeable devant $v(t)$?
2. Montrer que le théorème de Bernoulli en écoulement non permanent irrotationnel s'écrit
$$\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = C(t) \tag{1}$$
où φ est le potentiel des vitesses et $C(t)$ une constante dépendante du temps.
3. Sous quelle hypothèse la formule de Toricelli $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ est-elle valable ?
4. Dans ce cas, déterminer la hauteur d'eau $h(t)$ en fonction de S, s, h^0, g et t.
5. En déduire l'expression du temps T pour vider le réservoir.
6. Déterminer le potentiel des vitesses $\varphi(x)$ dans le tube.
7. Montrer qu'en prenant en compte l'accélération dans le tube, on obtient l'équation différentielle non linéaire suivante
$$2L\frac{dv}{dt} = 2gh^0 - v^2. \tag{2}$$
8. Chercher une solution de (2) sous la forme $v(t) = v_\infty \tanh(t/\tau)$ où la vitesse v_∞ et le temps τ sont à exprimer en fonction de g, h^0 et L.
9. Comparer T et τ en supposant que L et h^0 sont du même ordre de grandeur. Conclure.

On rappelle que $\tanh(u)' = 1 - \tanh(u)^2$.

Exercice 3 (3 points)

Un modèle réduit destiné à l'étude des marées est construit en adoptant l'échelle e_{p} en plan et e_{h} en hauteur. La période moyenne d'une marée est de $12h25$ et nous souhaitons estimer cette durée sur le modèle réduit. Les applications numériques se feront pour les deux modèles suivants :

$$(e_{\mathrm{p}}, e_{\mathrm{h}}) = (1/500, 1/80), \quad \text{et} \quad (e_{\mathrm{p}}, e_{\mathrm{h}}) = (1/50000, 1/500).$$

Soient L, H et T, une dimension horizontale, la dimension verticale et le temps caractéristiques.

1. Quelle composante de la vitesse est négligeable ? Justifier
   Donner une valeur caractéristique des composantes prépondérantes.
2. Quelle nombre sans dimension faut-il conserver ?
   En déduire l'expression de la période d'une marée sur la maquette.
3. Application numérique pour chaque modèle.

Annexe

Questions de cours

1. Expression et interprétation physique des opérateurs différentiels
2. Dérivée particulaire d'une grandeur physique et déformation d'une particule fluide [1]
3. Equation d'équilibre et équation de continuité
4. Rappel sur les forces conservatives
5. Equation de l'hydrostatique et équation de Pascal
6. Principe des vases communicants, tube piézométrique et presse hydraulique
7. Résultante des forces de pression sur une surface et principe d'Archimède
8. Equation d'Euler à partir de l'équation d'équilibre
9. Th. de Bernoulli en écoulement permanent irrotationnel à partir de l'équation d'Euler
10. Formule de Toricelli, Venturi et Tube de Pitot
11. Th. d'Euler avec démonstration
12. Potentiel des vitesses et fonction de courant - Equipotentielles et Lignes de courant
13. Expérience de Newton. Hypothèse des fluides newtoniens
14. Equation de Navier–Stokes (NS) à partir de l'équation d'équilibre
15. Equation de Stokes à partir de l'équation de NS et Nombre de Reynolds
16. Viscosimètre de Couette
17. Th. de Bernoulli généralisé - Coefficients de pertes de charge
18. Equation de NS adimensionnalisée et nombres sans dimension
19. Expérience de Reynolds
20. Principe de l'obtention de l'équation de Reynolds à partir de l'équation de NS
21. Hypothèse de Boussinesq et modèle de longueur de mélange
22. Obtention de la formule de Manning–Strikler
23. Profondeur critique - Cas général et cas particuler du canal rectangulaire
24. Ecoulements graduellement variés

1. Sans interprétation des composantes des tenseurs D et W