E.S.T.P
GME1

Hydrodynamique
Application n°1
P. Sochala

22/12/14

Exercice 1 - Relations vectorielles

Soient f un champ scalaire, u un champ vectoriel et A un champ tensoriel d'ordre 2. Démontrer les relations suivantes

1. $div(fA) = f div(A) + A\nabla f$
2. $div(Au) = div(A^\top) \cdot u + A : \nabla u$, où $^\top$ désigne la transposée et : le produit doublement contracté défini par $A : B = A_{ij}B_{ji}$.
3. $A : B = 0$ si A est symétrique et B (un champ tensoriel) antisymétrique.

Indication : on se placera en dimension 2 pour alléger les calculs.

Exercice 2 - Théorème de l'énergie cinétique

Nous souhaitons démontrer le théorème de l'énergie cinétique.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{\Omega^t}\frac{\rho v^2}{2} = \int_{\Omega^t}\rho f\cdot v + \int_{\partial\Omega^t}\sigma n\cdot v - \int_{\Omega^t}\sigma : D} \tag{1}$$

1. Que représentent σ et D ?
2. Montrer que $div(\sigma v) = div(\sigma)\cdot v + \sigma : D$
3. Montrer que
$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega^t}\frac{\rho v^2}{2} = \int_{\Omega^t}\frac{\rho}{2}\frac{dv^2}{dt}.$$
4. En déduire la démonstration de (1).

L'équation (1) peut s'écrire sous la forme

$$P^e = \frac{dK}{dt} + P^i, \tag{2}$$

avec

$$K := \int_{\Omega^t}\frac{\rho v^2}{2}, \quad P^e := \int_{\Omega^t}\rho f\cdot v + \int_{\partial\Omega^t}\sigma n\cdot v, \quad P^i := \int_{\Omega^t}\sigma : D,$$

où K est l'énergie cinétique, P^e les puissances extérieures et P^i les puissances intérieures. L'équation (2) signifie que *la puissance extérieure fournie à un milieu continu se transforme en mouvement et/ou en déformation.*

5. Donner la répartition de puissance extérieure dans ces différents cas :
   - une boule de billard après impulsion,
   - un crash de voiture,
   - une boule de caoutchouc comprimée lentement.

Exercice 3 - Solide à l'interface entre deux liquides

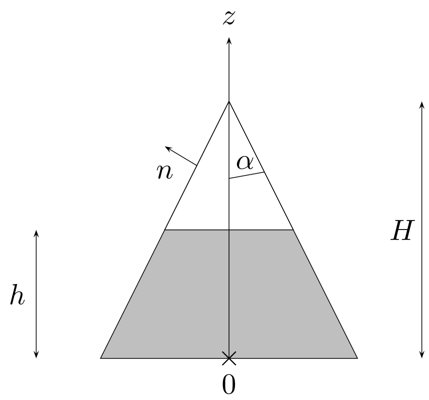
Un solide homogène cubique flotte au niveau de la surface de séparation entre deux liquides immiscibles : l'eau et un hydrocarbure de densité d_{h}=0.75. Le cube entièrement immergé a 20% de son volume dans l'eau.

1. Indiquer sans calcul un encadrement de la densité du bloc.
2. Déterminer la masse volumique du bloc.

Exercice 4 - Force pressante sur un entonnoir retourné

Soit un entonnoir conique d'axe de révolution vertical ascendant Oz, de demi-angle α, de hauteur H et de normale extérieure unitaire n. On remplit l'entonnoir d'eau sur une hauteur h en supposant que le contact à la base reste parfait de sorte que l'eau ne s'écoule pas.

1. Exprimer le champ de pression en fonction de z.
2. Indiquer la forme générale de la résultante des forces de pression du fluide sur l'entonnoir.
3. Déterminer l'expression d'une surface élémentaire du cône à une hauteur z.
4. Montrer que la composante verticale de la résultante des forces de pression est
$$F_z = F_0 \int_0^1 \left(u^2 - (k+1)u + k\right) du,$$
avec $u := z/h$ et les quantités F_0 et k à préciser.
5. Application numérique pour $\alpha = 30^\circ$, $H = 12cm$ et $h = 4cm$.
6. Calculer la masse minimale de l'entonnoir pour que l'eau ne s'écoule pas par la base.



Exercice 5 - Oscillations dans un tube en U

Un tube en U de section constante est rempli d'un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ. La longueur totale de fluide est notée L et nous provoquons des oscillations comme illustré sur la figure ci-dessous.

1. Donner le théorème de Bernoulli en prenant en compte le terme d'accélération.
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la quantité z.
3. En déduire la période des oscillations.
4. Ce modèle vous parait-il réaliste ?