E.S.T.P
ME1

Composition d'Hydrodynamique.

P. Sochala

23/01/15

Aucun document autorisé.
Calculatrice de l'école autorisée.
2h30

Ce sujet comporte 4 pages.
Les deux questions de cours sont sur 6 pts.
L'exercice est sur 4 points et le problème est sur 10 points.

Questions de cours

• Le numéro n de la question à traiter est obtenu par la formule suivante

$$n = 1 + N_{\text{élève}} + X - 24 \times ENT\left(\frac{N_{\text{élève}} + X}{24}\right)$$

dans laquelle $N_{\text{élève}}$ est le ***numéro d'élève attribué en début de scolarité***,
X est un entier donné pour chaque question,
$ENT()$ désigne la partie entière.

• Exemple : Barclais Xavier-Manuel, $N_{\text{élève}} = 9499$ ($N_{\text{élève}} \neq 10$)
$X = 5$

$$n = 1 + 9499 + 5 - 24 \times ENT\left(\frac{9499 + 5}{24}\right) = 1$$

• Remarques : - les questions de cours sont données en Annexe,
- $N_{\text{élève}}$ n'est pas un numéro éventuel attribué à votre place pour la composition,
- ***toute question ne devant pas être traitée ne sera pas corrigée***.

Question 1 (3 points)

L'entier X pour cette question est 1.

Question 2 (3 points)

L'entier X pour cette question est 19.

Exercice - Hémisphères de Magdebourg (4 points)

En 1654, Otto Von Guericke, bourgmestre de la ville allemande de Magdebourg, réalisa une expérience mettant en évidence la pression atmosphérique. Il utilisa deux hémisphères métalliques de $40cm$ de diamètre, parfaitement adaptés l'un à l'autre avec un joint étanche. Quand l'air fut enlevé de l'intérieur de la sphère avec une pompe, il fallut deux attelages de huit chevaux tirant dans une direction opposée pour séparer les deux hémisphères.

1. Pourquoi cette expérience met en évidence la pression atmosphérique ?
2. Donner la force pour séparer les hémisphères si la pression intérieure est $0.1 p_{\mathrm{atm}}$.
3. Donner la force pour séparer les hémisphères si la pression intérieure est nulle.
4. Quelle masse maximale peut-on soulever avec la force calculée dans les deux cas ?

Problème - Formule de Stokes (10 points)

Nous souhaitons démontrer la formule de Stokes qui donne la force F s'exercant sur une sphère de rayon R dans un écoulement uniforme de fluide newtonien de viscosité dynamique μ et de vitesse v_0 dans la direction e_x,

$$F = 6\pi\mu R v_0 e_x.$$

Nous proposons d'utiliser le système de coordonnées sphériques dans lequel un point P a pour coordonnées (r, θ, φ). Notons que la symétrie axiale autour de e_x permet d'éliminer la dépendance en φ comme illustré sur la figure 1. Rappelons que $e_x = \cos(\theta) e_r - \sin(\theta) e_\theta$.

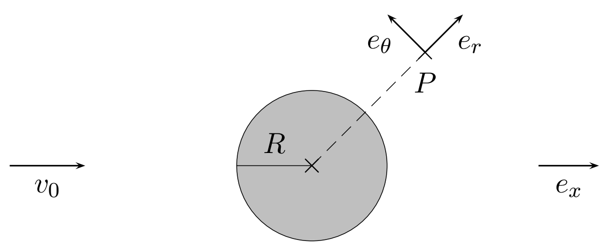

FIGURE 1 – Sphère dans un écoulement uniforme de vitesse v_0.

Les forces extérieures sont négligées et nous admettons que le champ de vitesse d'un tel écoulement en régime de Stokes est

$$v_r = v_0 \cos(\theta) \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right), \quad v_\theta = -v_0 \sin(\theta) \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right), \quad v_\varphi = 0.$$

1. Rappeler l'équation de Stokes et son domaine de validité (*i.e.* valeur de R_e).
2. Quelles sont les conditions aux limites du problème ? Le champ de vitesse les satisfait-il ?
3. La condition d'incompressibilité est-elle vérifiée ?
4. Montrer que le champ de pression est $p = p_0 - \frac{3R}{2r^2} \mu v_0 \cos(\theta)$.
5. Déterminer le gradient du champ de vitesse.
6. En déduire que la composante normale des contraintes à la surface de la sphère est $\sigma(r = R, \theta) \cdot e_r = -p_0 e_r + \frac{3\mu v_0}{2R} e_x$.
7. En déduire la formule de Stokes.

Formulaire en coordonnées sphériques

Equation de continuité

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(v_\theta \sin(\theta))}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right) = 0$$

Equation de Navier-Stokes

– composante e_r

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \nu\left(\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(v_\theta\sin(\theta))}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right)$$

– composante e_θ

$$\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2}{r\tan(\theta)} + \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} = \nu\left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2(\theta)} - \frac{2\cos(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)$$

– composante e_φ

$$\frac{dv_\varphi}{dt} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi}{r\tan(\theta)} + \frac{1}{\rho r\sin(\theta)}\frac{\partial p}{\partial\varphi} = \nu\left(\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2\sin^2(\theta)}\right)$$

Laplacien

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Gradient de vitesse

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta} - \dfrac{v_\theta}{r} & \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \dfrac{v_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{v_r}{r} & \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} - \dfrac{v_\varphi}{r\tan(\theta)} \\ \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\theta} & \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \dfrac{v_r}{r} + \dfrac{v_\theta}{r\tan(\theta)} \end{pmatrix}$$

Résultante des forces exercées par une fluide sur une paroi

$$F = \int_S \sigma n dS.$$

Annexe

Questions de cours

1. Expression et interprétation physique des opérateurs différentiels
2. Dérivée particulaire d'une grandeur physique et déformation d'une particule fluide[1]
3. Equation d'équilibre et équation de continuité
4. Rappel sur les forces conservatives
5. Equation de l'hydrostatique et équation de Pascal
6. Principe des vases communicants, tube piézométrique et presse hydraulique
7. Résultante des forces de pression sur une surface et principe d'Archimède
8. Equation d'Euler à partir de l'équation d'équilibre
9. Th. de Bernoulli en écoulement permanent irrotationnel à partir de l'équation d'Euler
10. Formule de Toricelli, Venturi et Tube de Pitot
11. Th. d'Euler avec démonstration
12. Potentiel des vitesses et fonction de courant - Equipotentielles et Lignes de courant
13. Expérience de Newton. Hypothèse des fluides newtoniens
14. Equation de Navier–Stokes (NS) à partir de l'équation d'équilibre
15. Equation de Stokes à partir de l'équation de NS et Nombre de Reynolds
16. Viscosimètre de Couette
17. Th. de Bernoulli généralisé - Coefficients de pertes de charge
18. Equation de NS adimensionnalisée et nombres sans dimension
19. Expérience de Reynolds
20. Principe de l'obtention de l'équation de Reynolds à partir de l'équation de NS
21. Hypothèse de Boussinesq et modèle de longueur de mélange
22. Obtention de la formule de Manning–Strikler
23. Profondeur critique - Cas général et cas particuler du canal rectangulaire
24. Ecoulements graduellement variés

1. Sans interprétation des composantes des tenseurs D et W