

Hydrodynamique

Pierre Sochala

*« Nous avons autant à apprendre des fluides que des solides.
Nous devrions nous apprendre à penser les solides à partir
de l'expérience primitive des fluides, ne serait-ce que pour
contrebalancer le mouvement épistémologique inverse suivi
par la tradition. »*

Gaston Bachelard, *le nouvel esprit scientifique*.

Avant-propos

Ce document est le support d'un enseignement donné depuis 2007 aux étudiants de première année de l'Ecole Spéciale des Travaux Publics (ESTP) dans la filière mécanique – électricité. S'adressant à des étudiants de troisième année de licence (ou à toute personne curieuse de découvrir la mécanique des fluides), il nécessite une formation de base en mathématiques et en physique. Les notions prérequisées sont néanmoins indiquées dans l'annexe A. La mécanique des fluides est un vaste domaine et bien des aspects de cette discipline ne sont pas abordés comme les écoulements géophysiques, la modélisation de la houle et les écoulements en milieux poreux. L'objectif de cet enseignement est de présenter les notions de base de l'hydrodynamique :

- les notions de **mécanique des milieux continus** et le **cadre du cours** sont indiqués dans le premier chapitre,
- l'**hydrostatique** permet de traiter simplement plusieurs situations grâce à l'équation de Pascal et au principe d'Archimède,
- les **fluides parfaits** sont considérés non visqueux : les théorèmes de Bernoulli et d'Euler sont des outils puissants qui s'appliquent dans de nombreuses situations. De même, les écoulements à potentiel complexe sont très efficaces pour les écoulements irrotationnels plans,
- les **fluides réels** prennent en compte la viscosité et c'est l'équation de Navier–Stokes qui régit ce type de fluide. Le théorème de Bernoulli généralisé permet le dimensionnement des circuits hydrauliques, la couche limite est une notion importante en mécanique des fluides et la similitude permet l'étude sur modèles réduits,
- les **écoulements turbulents** sont difficiles à appréhender et sont souvent modélisés par l'équation de Reynolds. Les modèles de turbulence le plus simple (modèle de Boussinesq) et le plus connu (modèle $k - \epsilon$) sont présentés,
- les **écoulements à surface libre** sont les écoulements en canaux et rivières. Les équations de Saint–Venant gouvernent ce type d'écoulement qui sont résolues dans des situations monodimensionnelles simplifiées.

Ce polycopié de cours a été réalisé à partir de nombreux extraits de cours disponibles librement sur Internet. Je remercie d'ailleurs l'ensemble des auteurs mettant à disposition leur travail sur le web. Trois ouvrages m'ont particulièrement servis :

- *Mécanique des fluides PC - PSI*
X. Carbonneau, J-B. Cazalbou, P. Chassaing, L. Joly - Bréal, 2005
- *Hydrodynamique physique*
E. Guyon, J-P. Hulin, L. Petit - Edp Sciences, 2001
- *Mécanique des fluides appliquée*
P-L. Viollet, J-P. Chabard, P. Esposito, D. Laurence - Presses de l'ENPC, 2003

Vous pouvez me faire part de vos remarques concernant l'organisation de ce document à l'adresse p.sochala@brgm.fr.

Table des matières

Chapitre 1 Introduction	11
1.1 Bases de mécanique des milieux continus	11
1.1.1 Milieu continu	11
1.1.2 Cinématique	12
1.1.3 Théorème de transport	14
1.1.4 Déformation	16
1.1.5 Contrainte et pression	18
1.1.6 Principes de conservation	20
1.2 Mécanique des fluides	23
1.2.1 Fluide	23
1.2.2 Hypothèses simplificatrices	24
1.2.3 Compressibilité	24
1.2.4 Quelques définitions	25
Chapitre 2 Hydrostatique	27
2.1 Equation de l'hydrostatique	27
2.1.1 Equilibre dans le cas général	27
2.1.2 Equation de Pascal	28
2.1.3 Applications	29
2.2 Résultante des forces de pression	31
2.2.1 Surface plane	31
2.2.2 Surface quelconque	33
2.2.3 Principe d'Archimède	35
2.3 Tension superficielle	36
2.3.1 Motivation	36
2.3.2 Forces de tension superficielle	37
Chapitre 3 Fluides parfaits	41
3.1 Equation d'Euler	41
3.2 Théorème de Bernoulli	42
3.2.1 Enoncé	42
3.2.2 Applications	44
3.3 Théorème d'Euler	47
3.3.1 Enoncé	47
3.3.2 Applications	48
3.4 Ecoulements irrotationnels	49
3.4.1 Théorème de Lagrange	49
3.4.2 Potentiel des vitesses	49

3.4.3	Paradoxe de d'Alembert	50
3.5	Écoulements irrotationnels plans	51
3.5.1	Fonction de courant	51
3.5.2	Potentiel et vitesse complexes	52
3.5.3	Formules de Blasius	53
3.5.4	Étude d'un cylindre en rotation	54
Chapitre 4 Fluides réels		59
4.1	Fluides newtoniens	59
4.1.1	Expérience de Newton	59
4.1.2	Equation de Navier–Stokes	61
4.1.3	Equation de Stokes	62
4.1.4	Écoulements entre deux plans horizontaux	63
4.1.5	Loi de Poiseuille	66
4.2	Théorème de Bernoulli généralisé	67
4.2.1	Énoncé	67
4.2.2	Perte de charge linéaire	68
4.2.3	Perte de charge singulière	72
4.2.4	Applications	73
4.3	Couche limite	74
4.3.1	Présentation	74
4.3.2	Equations de Prandtl	74
4.3.3	Equation de Blasius	75
4.4	Similitude	77
4.4.1	Equation de Navier–Stokes adimensionnée	77
4.4.2	Théorème de Vaschy–Buckingham	78
4.4.3	Applications	78
Chapitre 5 Écoulements turbulents		79
5.1	Notions générales sur la turbulence	79
5.1.1	Expérience de Reynolds	79
5.1.2	Caractérisation de la turbulence	81
5.1.3	Approches possibles	81
5.2	Modélisation statistique	81
5.2.1	Décomposition de Reynolds	81
5.2.2	Equation de Reynolds	82
5.2.3	Modèles de fermeture	83
5.2.4	Écoulement entre deux plans horizontaux	84
Chapitre 6 Écoulements à surface libre		89
6.1	Equations de Saint–Venant	89
6.1.1	Cas bidimensionnel	89
6.1.2	Linéarisation	92
6.1.3	Cas monodimensionnel	93
6.1.4	Onde cinématique	93
6.2	Écoulements permanents monodimensionnels	94
6.2.1	Formules de frottement	94
6.2.2	Hauteur critique	95
6.2.3	Hauteur normale	97

6.2.4	Écoulements graduellement variés	97
Annexe A	Rappels de mathématiques et de physique	101
A.1	Champs et opérations	101
A.2	Opérateurs différentiels	102
A.2.1	Gradient	102
A.2.2	Divergence	102
A.2.3	Rotationnel	104
A.2.4	Laplacien	104
A.2.5	Propriétés des opérateurs	105
A.3	Forces conservatives	106
Annexe B	Compléments de MMC	109
B.1	Théorème de Leibniz	109
B.2	Théorème de Reynolds généralisé	109
B.3	Interprétation des composantes des tenseurs D et W	110
B.3.1	Dilatation	110
B.3.2	Déformation angulaire	111
B.3.3	Rotation	112
	Principales notations	113
	Index	115
	Table des Figures	117

Chapitre 1

Introduction

L'objectif de ce premier chapitre est de fournir les bases nécessaires à la bonne compréhension du cours. Il est clair que les notions de mécanique des milieux continus (MMC) ne se limitent pas à la mécanique des fluides mais sont également utilisées en mécanique des solides (résistance des matériaux et élasticité par exemple).

Dans ce chapitre introductif, nous commençons par donner les bases de la MMC en abordant successivement les notions de milieu continu, cinématique, théorème de transport, déformation, contrainte et pression ainsi que les principes de conservation. Nous abordons ensuite des concepts propres à la mécanique des fluides en définissant la notion de fluide, en précisant les hypothèses réalisées en hydrodynamique notamment concernant la compressibilité et en donnant quelques définitions.

1.1 Bases de mécanique des milieux continus

1.1.1 Milieu continu

La représentation de la matière est différente suivant l'échelle d'étude considérée. A *l'échelle microscopique*, la matière se présente comme un ensemble de molécules en mouvement qui entrent en collision les unes avec les autres. Ce mouvement est caractérisé par le libre parcours moyen entre deux collisions ainsi que par la vitesse quadratique moyenne d'agitation des molécules. L'étude de la matière fluide à cette échelle relève de la *théorie cinétique des gaz*. Dans ce cas, la masse volumique d'un ensemble de N molécules de masse m_k situées dans un volume v est

$$\rho = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^N m_k.$$

L'agitation moléculaire entraîne des variations du nombre de molécules dans un volume considéré ce qui engendre des fluctuations microscopiques de la masse volumique comme le schématise la figure 1.1. A *l'échelle macroscopique*, la matière semble répartie continûment dans l'espace et la *mécanique des milieux continus* est la théorie utilisée à cette échelle. Dans ce cas, la masse volumique d'un système de masse M et de volume V est

$$\rho = \frac{M}{V}.$$

Des variations macroscopiques de la masse volumique dues à l'hétérogénéité de la matière sont présentes à cette échelle comme le montre la figure 1.1. La notion de *particule fluide* définie à *l'échelle mésoscopique* permet de concilier le milieu discret de l'échelle microscopique avec le milieu continu de l'échelle macroscopique. En effet, une particule fluide est un volume assez grand

pour contenir un nombre important de molécules ($v \rightarrow \infty$) et assez petit pour être considéré comme un point matériel ($V \rightarrow 0$). L'hypothèse de continuité d'un milieu matériel postule qu'il existe ces volumes dans lesquels les propriétés physiques de ce milieu sont constantes.

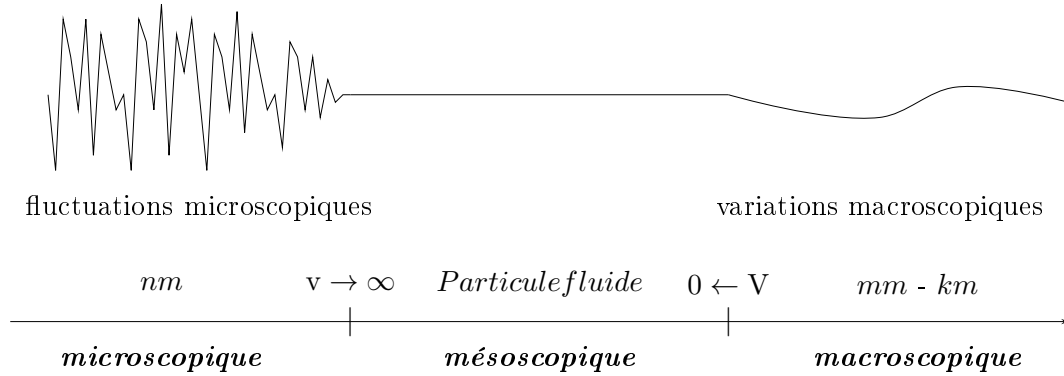


FIGURE 1.1 – Variation de la masse volumique suivant l'échelle considérée.

Le nombre adimensionnel de Knudsen (physicien hollandais, 1871–1949) \mathcal{K}_n , défini comme le rapport du libre parcours moyen entre deux collisions moléculaires l et d'une dimension caractéristique du mouvement moyen L ,

$$\mathcal{K}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l}{L},$$

permet de définir le type d'écoulement. Quand le nombre de Knudsen est petit ($\mathcal{K}_n < 0.01$) comme c'est le cas à basse altitude, la mécanique des milieux continus est valable et les écoulements sont gouvernés par l'équation de Navier–Stokes (ingénieur français, 1785–1835 et physicien anglais, 1819 – 1903) qui est détaillée au chapitre 4 et dont voici l'expression

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = F + \nu \Delta v,$$

où v est la vitesse, p la pression, F l'ensemble des forces extérieures et ν la viscosité. Quand le nombre de Knudsen est supérieur à 1, comme c'est le cas pour l'atmosphère raréfiée, la théorie cinétique des gaz est valide et les écoulements sont alors régis par l'équation de Boltzmann (physicien autrichien, 1844–1906),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla f = Q,$$

où f est la densité des molécules, ξ la vitesse des particules et Q un opérateur de collision. Dans les cas intermédiaires, les écoulements sont déterminés par un couplage de ces deux équations.

1.1.2 Cinématique

Deux types d'analyses existent pour décrire le mouvement d'un milieu continu. Nous considérons, sur un intervalle de temps $[0, T]$, la déformation d'un domaine défini par la configuration initiale Ω^0 . Le domaine de l'espace occupé à l'instant t est noté Ω^t . Une particule P est repérée par ses coordonnées $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)^\top$ à l'instant initial et par ses coordonnées $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$ à l'instant t (en toute rigueur, ces coordonnées devraient être notées \mathbf{x}^t).

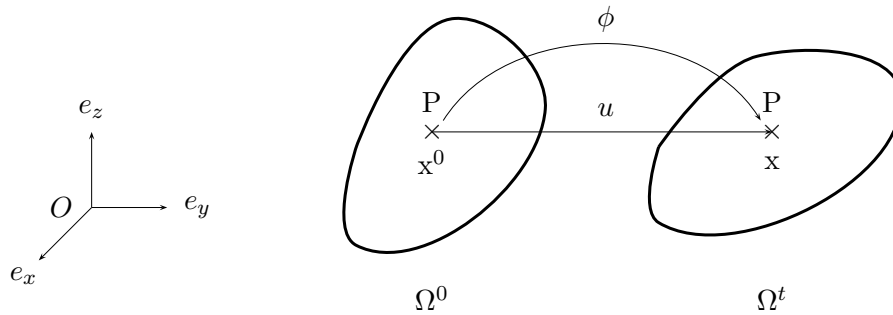


FIGURE 1.2 – Configurations initiale et courante d'un système.

1.1.2.1 Descriptions lagrangienne et eulérienne

La description *lagrangienne* consiste à déterminer le *vecteur position* \mathbf{x} de toutes les particules à chaque instant $t \in [0, T]$ à partir de leurs coordonnées initiales \mathbf{x}^0 ,

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^t, \mathbf{x} = \phi(\mathbf{x}^0, t). \quad (1.1)$$

Les hypothèses du milieu continu imposent que ϕ soit une bijection de Ω^0 sur Ω^t , à tout instant t , et que ϕ soit continue par rapport aux variables d'espace et de temps. Dans cette analyse, on étudie l'évolution du système suivi dans son mouvement. Par exemple, quand nous sommes dans une barque sur une rivière qui s'écoule, la vitesse de la barque entraînée par le courant représente la vitesse lagrangienne. Les variables de Lagrange sont (\mathbf{x}^0, t) et cette description est souvent préférée dans les études des solides déformables pour lesquels il est habituel de chercher le *champ de déplacement* u qui est défini par

$$u(\mathbf{x}^0, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 = \phi(\mathbf{x}^0, t) - \mathbf{x}^0.$$

La description *eulérienne* consiste à déterminer le *vecteur vitesse* v de toutes les particules à chaque instant $t \in [0, T]$,

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^t, v = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}^0, t). \quad (1.2)$$

Dans cette analyse, on étudie l'évolution du système en un point géométrique fixe où les vitesses observées au cours du temps sont des vitesses de particules différentes. Par exemple, quand nous regardons s'écouler une rivière du haut d'un pont, nous percevons la vitesse eulérienne. Les variables d'Euler sont (\mathbf{x}, t) et cette description est souvent préférée dans les études des fluides pour lesquels il est habituel de chercher le champ de vitesse.

1.1.2.2 Trajectoires et lignes de courant

La *trajectoire* d'un point matériel est définie comme l'ensemble des positions occupées par ce point matériel au cours du temps. En variables lagrangiennes, les trajectoires sont données directement alors qu'en variables eulériennes, les trajectoires s'obtiennent en intégrant le système différentiel

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} dx = v_x dt, \\ dy = v_y dt, \\ dz = v_z dt. \end{cases}$$

Les *lignes de courant* à un instant t sont les courbes tangentes au vecteur vitesse en chacun de leur point. Les lignes de courant s'obtiennent en intégrant le système différentiel

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \Leftrightarrow \begin{cases} v_y dx = v_x dy, \\ v_z dy = v_y dz. \end{cases}$$

En écoulement permanent, les trajectoires et les lignes de courant sont confondus. Une *surface de courant* est l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur une courbe \mathcal{C} . Si cette courbe \mathcal{C} est fermée comme sur la figure 1.3, la surface de courant s'appelle alors un *tube de courant*

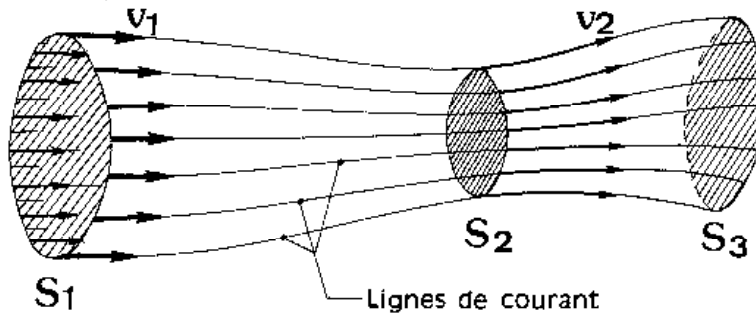


FIGURE 1.3 – Tube de courant.

1.1.2.3 Dérivée particulaire d'une grandeur physique

La dérivée temporelle d'une grandeur physique décrite par les variables d'Euler mesure les variations en temps d'une quantité suivie dans son mouvement :

Théorème 1. *La dérivée temporelle en description eulérienne d'une grandeur est la somme d'un terme « temporel » et d'un terme « advectif » qui représente la variation liée à l'écoulement,*

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f} \quad (1.3)$$

Démonstration. Il suffit d'écrire la dérivée de la grandeur $f(\mathbf{x}, t)$ en tenant compte de la variation temporelle des variables x , y et z ; puis de remarquer que les composantes du champ de vitesse apparaissent,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + \frac{\partial f}{\partial z} v_z. \end{aligned}$$

□

1.1.3 Théorème de transport

La dérivée temporelle de l'intégrale d'une fonction décrite en variables eulériennes est donnée par le théorème de Reynolds (ou théorème de transport) dont la démonstration repose sur la formule de changement de variable et la relation d'Euler (mathématicien et physicien suisse, 1707–1783).

Théorème de Reynolds. *La dérivée particulaire d'une intégrale de volume définie en densité volumique d'une grandeur $f(\mathbf{x}, t)$ décrite par les variables eulériennes est*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f \, dV = \int_{\Omega^t} \left(\frac{df}{dt} + f \operatorname{div}(v) \right) dV.} \quad (1.4)$$

Démonstration. Le changement de variable pour se ramener sur le domaine initial Ω^0 s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f(\mathbf{x}, t) \, dV \stackrel{(1.5)}{=} \frac{d}{dt} \int_{\Omega^0} f(\phi(\mathbf{x}^0), t) J(\mathbf{x}^0, t) \, dV^0.$$

Le développement du membre de droite de l'égalité précédente et la relation d'Euler donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f(\mathbf{x}, t) \, dV = \int_{\Omega^0} \left(\frac{df(\phi(\mathbf{x}^0), t)}{dt} J(\mathbf{x}^0, t) + f(\phi(\mathbf{x}^0), t) \operatorname{div}(v) J(\mathbf{x}^0, t) \right) dV^0.$$

Un autre changement de variable revenant sur le domaine Ω^t permet de conclure. \square

Changement de variable. *Soient U et V deux ouverts non vides de \mathbb{R}^n et $\varphi : U \rightarrow V$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme (φ est une bijection telle que φ et φ^{-1} ont des dérivées partielles continues). Si $(f \circ \varphi)|J|$ est intégrable sur U , alors pour toute fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, on a*

$$\int_V f(\mathbf{x}) \, dV = \int_U f(\varphi(\eta)) |J(\eta)| \, dv, \quad (1.5)$$

où J désigne le jacobien de ϕ .

Cette relation est un résultat de la théorie de la mesure. Le jacobien est défini comme le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation ϕ ,

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x^0} & \frac{\partial \phi_x}{\partial y^0} & \frac{\partial \phi_x}{\partial z^0} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial x^0} & \frac{\partial \phi_y}{\partial y^0} & \frac{\partial \phi_y}{\partial z^0} \\ \frac{\partial \phi_z}{\partial x^0} & \frac{\partial \phi_z}{\partial y^0} & \frac{\partial \phi_z}{\partial z^0} \end{vmatrix} \stackrel{(1.1)}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^0} & \frac{\partial x}{\partial y^0} & \frac{\partial x}{\partial z^0} \\ \frac{\partial y}{\partial x^0} & \frac{\partial y}{\partial y^0} & \frac{\partial y}{\partial z^0} \\ \frac{\partial z}{\partial x^0} & \frac{\partial z}{\partial y^0} & \frac{\partial z}{\partial z^0} \end{vmatrix}.$$

Le jacobien exprime la variation des petits volumes et vérifie $0 < J < \infty$ en mécanique des milieux continus. En effet, un jacobien nul correspondrait à un volume initial de matière qui se transformerait en un volume nul. De même, un jacobien qui deviendrait infini correspondrait à une quantité finie de matière se dilatant en temps fini dans un volume infini.

Relation d'Euler. *Le jacobien J de la transformation ϕ vérifie l'équation différentielle d'expansion de volume*

$$\frac{dJ}{dt} = \operatorname{div}(v)J, \quad (1.6)$$

avec la condition initiale $J(0) = 1$.

Démonstration. La condition initiale provient du fait que ϕ est l'application identité à l'instant 0 impliquant que la matrice jacobienne soit égale à la matrice identité. L'équation (1.2) fait apparaître les composantes de la vitesse dans la dérivée du jacobien,

$$\frac{dJ}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x^0} & \frac{\partial v_x}{\partial y^0} & \frac{\partial v_x}{\partial z^0} \\ \frac{\partial y}{\partial x^0} & \frac{\partial y}{\partial y^0} & \frac{\partial y}{\partial z^0} \\ \frac{\partial z}{\partial x^0} & \frac{\partial z}{\partial y^0} & \frac{\partial z}{\partial z^0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^0} & \frac{\partial x}{\partial y^0} & \frac{\partial x}{\partial z^0} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x^0} & \frac{\partial v_y}{\partial y^0} & \frac{\partial v_y}{\partial z^0} \\ \frac{\partial z}{\partial x^0} & \frac{\partial z}{\partial y^0} & \frac{\partial z}{\partial z^0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^0} & \frac{\partial x}{\partial y^0} & \frac{\partial x}{\partial z^0} \\ \frac{\partial y}{\partial x^0} & \frac{\partial y}{\partial y^0} & \frac{\partial y}{\partial z^0} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x^0} & \frac{\partial v_z}{\partial y^0} & \frac{\partial v_z}{\partial z^0} \end{vmatrix}.$$

En remarquant que $\frac{\partial v_x}{\partial x^0} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^0}$, $\frac{\partial v_x}{\partial y^0} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y^0}$ et $\frac{\partial v_x}{\partial z^0} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^0}$, le premier déterminant se factorise par $\frac{\partial v_x}{\partial x}$. De même, les deuxième et troisième déterminants se factorisent respectivement par $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ et $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ de sorte que l'on obtient

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} J + \frac{\partial v_y}{\partial y} J + \frac{\partial v_z}{\partial z} J = \operatorname{div}(v)J.$$

□

Nous terminons par quelques remarques :

– Le théorème de Reynolds s'écrit sous une forme légèrement différente en explicitant la dérivée particulaire. Dans le cas d'une fonction vectorielle, nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} G \, dV = \int_{\Omega^t} \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \operatorname{div}(G \otimes v) \right) dV.$$

– La mesure de l'intégrale dans (1.4) est capitale car la dérivée particulaire d'une intégrale de volume définie en densité massique est

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \mathbf{f} \, dm = \int_{\Omega^t} \frac{d\mathbf{f}}{dt} \, dm.}$$

Démonstration. Le théorème de Reynolds appliqué à la fonction $f \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f} \rho$ s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \mathbf{f} \rho \, dV = \int_{\Omega^t} \left(\frac{d\mathbf{f}}{dt} \rho + \mathbf{f} \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{f} \rho \operatorname{div}(v) \right) dV = \int_{\Omega^t} \left(\frac{d\mathbf{f}}{dt} \rho + \mathbf{f} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) \right] \right) dV.$$

En utilisant que $\rho dV = dm$ et que la quantité entre crochets s'annule car il s'agit de l'équation de conservation de la masse établie au §1.1.6, nous obtenons le résultat. □

– Il s'avère parfois nécessaire de généraliser (1.4) lorsque f est discontinue (cf. Annexe B.2).

1.1.4 Déformation

Regardons la façon de mesurer la déformation d'un milieu continu en comparant à un instant donné, les vitesses de deux points infiniment voisins M et M' . En utilisant la formule de Taylor (mathématicien anglais, 1685–1731) jusqu'au premier ordre, nous obtenons

$$\begin{cases} v'_x = v_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_M dx + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_M dy + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_M dz, \\ v'_y = v_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_M dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_M dy + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_M dz, \\ v'_z = v_z + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_M dx + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)_M dy + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_M dz, \end{cases} \Leftrightarrow v' = v + \nabla v \, dx, \quad (1.7)$$

où $dx \stackrel{\text{def}}{=} (dx, dy, dz)^\top$. En décomposant le gradient de vitesse ∇v suivant ses parties symétrique et antisymétrique, la relation (1.7) devient

$$v' = v + \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla^\top v) dx + \frac{1}{2}(\nabla v - \nabla^\top v) dx.$$

1.1.4.1 Tenseur des taux de déformation

Le tenseur des taux de déformation D est défini comme la partie symétrique du gradient de vitesse :

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla^\top v).$$

Les composantes de ce tenseur sont homogènes à l'inverse d'un temps (s^{-1}) et son expression est

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

On remarque que la trace de ce tenseur est égale à la divergence de la vitesse :

$$\text{Tr}(D) = \text{div}(v).$$

1.1.4.2 Tenseur des taux de rotation

Le tenseur des taux de rotation W est défini comme la partie antisymétrique du gradient de vitesse :

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\nabla v - \nabla^\top v).$$

Les composantes de ce tenseur sont homogènes à l'inverse d'un temps (s^{-1}) et son expression est

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Le tenseur des taux de rotation W est relié au *vecteur tourbillon* $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \text{rot}(v)$ par l'égalité

$$W dx = \Omega \wedge dx.$$

1.1.4.3 Interprétation physique des tenseurs D et W

Il est possible de montrer (cf. section B.3) que les petits déplacements d'une particule fluide font intervenir les quatre transformations suivantes :

- translation,
- dilatation (partie diagonale D_{diag} du tenseur D),
- déformation angulaire (partie extra-diagonale du tenseur D),
- rotation.

Ainsi, l'équation (1.7) peut se réécrire

$$v' = \underbrace{v}_{\text{translation}} + \left(\underbrace{D_{\text{diag}}}_{\text{dilatation}} + \underbrace{(D - D_{\text{diag}})}_{\text{déf. angulaire}} + \underbrace{W}_{\text{rotation}} \right) dx.$$

Nous illustrons cette décomposition en considérant le champ de vitesse bidimensionnel stationnaire suivant

$$v = \begin{pmatrix} -x - y \\ 2x - y \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le gradient de ce champ peut se reformuler,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} dx = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dx + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dx + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} dx.$$

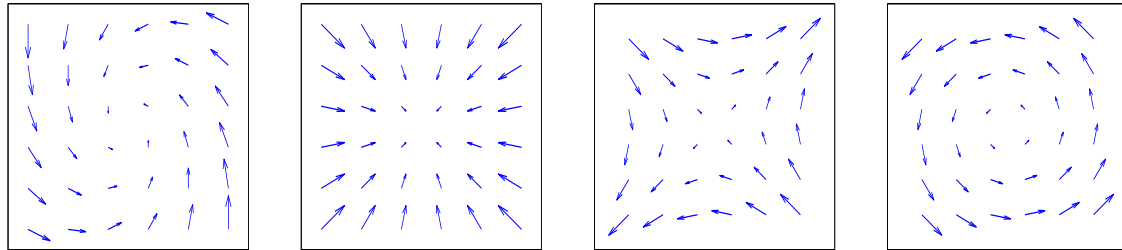


FIGURE 1.4 – Exemple de décomposition de ∇v suivant les transformations de base.

1.1.5 Contrainte et pression

Nous considérons un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ soumis à des *efforts extérieurs* qui représentent les actions à distance comme la pesanteur et des *efforts intérieurs* qui correspondent aux actions locales de contact traduisant la cohésion. Les efforts extérieurs sont représentés par une densité volumique de force. Les efforts intérieurs pourraient aussi être représentés par une densité volumique de force mais la mécanique des milieux continus suppose que le rayon d'action de ces forces est suffisamment faible (distance intermoléculaire) devant l'échelle d'observation (macroscopique) pour se limiter à leur action sur la frontière de Ω . Ces efforts sont ainsi modélisés selon le postulat suivant

Postulat de Cauchy. *Les efforts intérieurs sont représentés par une densité surfacique de force qui s'exerce sur la surface $\partial\Omega$ et ne dépend que du point M considéré et du vecteur normal unitaire n à $\partial\Omega$. Cette densité surfacique de force s'appelle **vecteur contrainte**, se note $T(M, n)$ et s'exprime en Pascal.*

Les efforts intérieurs sont aussi représentés localement par une densité surfacique de moments générée uniquement par le vecteur contrainte (la théorie des milieux continus dit de « Cosserat » s'affranchit de cette seconde hypothèse).

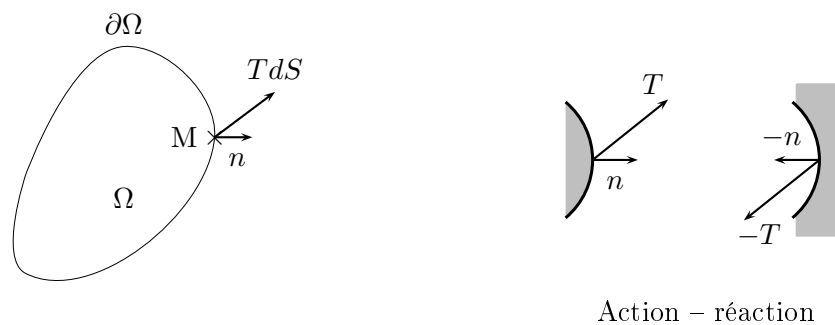


FIGURE 1.5 – Efforts intérieurs représentés par une densité surfacique de forces T .

Propriété 1. *Le vecteur contrainte est impair selon la normale, $T(M, -n) = -T(M, n)$.*

La démonstration repose sur le bilan de quantité de mouvement d'un disque d'épaisseur négligeable devant la hauteur. Intuitivement, l'imparité du vecteur contrainte traduit la loi d'action-réaction comme l'illustre la partie droite de la figure 1.5.

Propriété 2. *Le vecteur contrainte est linéaire selon la normale, c'est-à-dire que $T(M, \sum_i \alpha_i n_i) = \sum_i \alpha_i T(M, n_i)$.*

La démonstration repose sur le bilan de quantité de mouvement d'un tétraèdre et utilise l'imparité du vecteur contrainte.

En considérant au point M trois orientations de la facette dS normales aux trois directions (e_x, e_y, e_z) , les trois vecteurs contraintes s'écrivent

$$T(M, e_x) = \begin{pmatrix} T_{xx} \\ T_{yx} \\ T_{zx} \end{pmatrix}, \quad T(M, e_y) = \begin{pmatrix} T_{xy} \\ T_{yy} \\ T_{zy} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T(M, e_z) = \begin{pmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \\ T_{zz} \end{pmatrix}.$$

Pour une normale quelconque $n \stackrel{\text{def}}{=} n_x e_x + n_y e_y + n_z e_z$, nous pouvons écrire compte-tenu de la linéarité du vecteur contrainte

$$T(M, n) = n_x T(M, e_x) + n_y T(M, e_y) + n_z T(M, e_z).$$

En adoptant les notations courantes en mécanique des milieux continus, cette égalité s'écrit

$$T(M, n) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix},$$

dont l'écriture matricielle est

$$\boxed{T = \sigma n.} \tag{1.8}$$

La matrice σ s'appelle le **tenseur des contraintes** ou *tenseur de Cauchy*.

Propriété 3. *Le tenseur des contraintes σ est symétrique en l'absence de couples intrinsèques.*

La démonstration indiquée au §1.1.6 découle de la conservation du moment cinétique.

- *Interprétation de σ*

En considérant un cube dont les arêtes sont portées par les vecteurs de référence du système orthonormé (O, e_x, e_y, e_z) , il est possible de donner une interprétation physique aux composantes du tenseur des contraintes. Les composantes diagonales sont les *contraintes normales* et les composantes extra-diagonales sont les *contraintes de cisaillement*.

- *Pression et décomposition de σ*

En définissant la *pression hydrostatique* p comme le tiers de la trace du tenseur des contraintes,

$$p \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma),$$

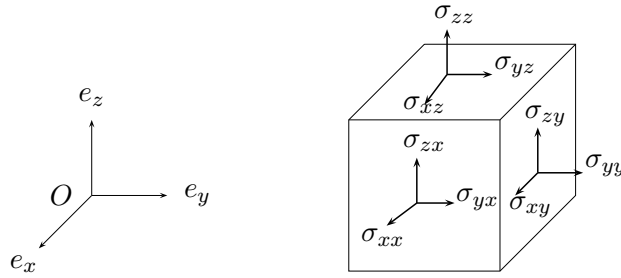


FIGURE 1.6 – Contraintes s'appliquant sur les facettes d'un cube.

il est possible de décomposer le tenseur de Cauchy de la façon suivante

$$\boxed{\sigma = \tau - pI}, \quad (1.9)$$

où le *tenseur des contraintes visqueuses* $\tau \stackrel{\text{def}}{=} \sigma + pI$ représente les frottements internes du fluide et la pression p est isotrope ce qui implique le caractère diagonal du tenseur. τ est la partie déviatorique ou de cisaillement ($Tr(\tau) = 0$) et p représente la partie sphérique du tenseur σ . La décomposition (1.9) s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

1.1.6 Principes de conservation

Les principes de conservation sont la base de la physique et traduisent qu'une propriété mesurable d'un système isolé reste constante au cours de l'évolution de ce système. Il existe de nombreux principes de conservation et nous présentons les quatre principes utilisés en mécanique classique : conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie.

1.1.6.1 Principe de conservation de la masse

Théorème 2. *La forme locale de la conservation de la masse est l'équation de continuité*

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0.} \quad (1.10)$$

Démonstration. La masse d'un domaine matériel Ω^t est supposée constante de sorte que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho = 0.$$

Le théorème de Reynolds puis la dérivée particulière de la masse volumique donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho &\stackrel{(1.4)}{=} \int_{\Omega^t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(v) \right) \\ &\stackrel{(1.3)}{=} \int_{\Omega^t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + \rho \text{div}(v) \right). \end{aligned}$$

La forme souhaitée est obtenue grâce à l'égalité $v \cdot \nabla \rho + \rho \text{div}(v) = \text{div}(\rho v)$. \square

1.1.6.2 Principe fondamental de la dynamique en translation

Théorème 3. *La forme locale de la conservation de la quantité de mouvement est l'équation d'équilibre*

$$\boxed{\rho \frac{dv}{dt} = \rho F + \operatorname{div}(\sigma)} \quad (1.11)$$

Démonstration. Le bilan de quantité de mouvement sur un domaine matériel Ω^t soumis à des forces surfaciques et volumiques (cf. section 1.1.5) s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho v = \int_{\partial\Omega^t} T + \int_{\Omega^t} \rho F,$$

où T est le vecteur contrainte et F [$N.kg^{-1}$] désigne les forces extérieures massiques. Le terme d'accélération se reformule grâce au théorème de Reynolds (1.4), alors que la relation (1.8) et le théorème de Gauss permettent d'introduire la divergence du tenseur des contraintes,

$$\int_{\Omega^t} \left(\frac{d\rho v}{dt} + \rho v \operatorname{div}(v) \right) = \int_{\Omega^t} \operatorname{div}(\sigma) + \int_{\Omega^t} \rho F.$$

Il reste maintenant à simplifier le terme d'accélération,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho v}{dt} + \rho v \operatorname{div}(v) &\stackrel{(1.3)}{=} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + v \cdot \nabla(\rho v) + \rho v \operatorname{div}(v) \\ &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot (\rho \nabla v + v \nabla \rho) + \rho v \operatorname{div}(v) \\ &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) + v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div}(v) \right) \end{aligned}$$

Le preuve se termine avec l'équation de continuité (1.10). □

1.1.6.3 Principe fondamental de la dynamique en rotation

Théorème 4. *La conservation du moment cinétique conduit à la symétrie du tenseur des contraintes*

$$\boxed{\sigma = \sigma^T} \quad (1.12)$$

Démonstration. La conservation du moment cinétique sur un domaine matériel Ω^t soumis à des moments surfaciques et volumiques s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \mathbf{x} \wedge \rho v = \int_{\partial\Omega^t} \mathbf{x} \wedge T + \int_{\Omega^t} \mathbf{x} \wedge \rho F.$$

Il est important de remarquer que les moments pris en compte sont uniquement générés par les forces puisque les couples volumiques intrinsèques¹ et les couples surfaciques intrinsèques sont supposés nuls. Avec un repère fixe (*i.e.* $dx/dt = 0$), le terme d'accélération se réécrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \mathbf{x} \wedge \rho v &\stackrel{(1.4)}{=} \int_{\Omega^t} \left(\frac{d(\mathbf{x} \wedge \rho v)}{dt} + (\mathbf{x} \wedge \rho v) \operatorname{div}(v) \right) \\ &= \int_{\Omega^t} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \wedge \rho v + \mathbf{x} \wedge \rho \frac{dv}{dt} + \mathbf{x} \wedge v \frac{d\rho}{dt} + (\mathbf{x} \wedge \rho v) \operatorname{div}(v) \right) \\ &\stackrel{(1.10)}{=} \int_{\Omega^t} \mathbf{x} \wedge \rho \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

1. présents en électromagnétisme par exemple

La conservation du moment cinétique devient

$$\int_{\Omega^t} \mathbf{x} \wedge \rho \frac{dv}{dt} = \int_{\partial\Omega^t} \mathbf{x} \wedge \sigma n + \int_{\Omega^t} \mathbf{x} \wedge \rho F \stackrel{(1.11)}{\Rightarrow} \int_{\partial\Omega^t} \mathbf{x} \wedge \sigma n = \int_{\Omega^t} \mathbf{x} \wedge \operatorname{div}(\sigma).$$

Un simple calcul montre que

$$\mathbf{x} \wedge \sigma n = \Lambda n \quad \text{avec} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} y\sigma_{zx} - z\sigma_{yx} & y\sigma_{zy} - z\sigma_{yy} & y\sigma_{zz} - z\sigma_{yz} \\ z\sigma_{xx} - x\sigma_{zx} & z\sigma_{xy} - x\sigma_{zy} & z\sigma_{xz} - x\sigma_{zz} \\ x\sigma_{yx} - y\sigma_{xx} & x\sigma_{yy} - y\sigma_{xy} & x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz} \end{pmatrix},$$

ce qui permet de réécrire l'égalité précédente

$$\int_{\Omega} \mathbf{x} \wedge \operatorname{div}(\sigma) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\Lambda). \quad (1.13)$$

Par ailleurs, nous avons la relation $\operatorname{div}(\Lambda) = \mathbf{x} \wedge \operatorname{div}(\sigma) + \begin{pmatrix} \sigma_{zy} - \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} - \sigma_{zx} \\ \sigma_{yx} - \sigma_{xy} \end{pmatrix} \stackrel{(1.13)}{\Rightarrow} \begin{matrix} \sigma_{zy} = \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \\ \sigma_{yx} = \sigma_{xy} \end{matrix}$. \square

1.1.6.4 Premier principe de la thermodynamique

Théorème 5. *La forme locale de l'équation d'énergie est*

$$\boxed{\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e v) = \rho v \cdot g + \operatorname{div}(\sigma v) + r - \operatorname{div}(q)} \quad (1.14)$$

Démonstration. Le bilan d'énergie sur un domaine matériel Ω^t traduit que la variation d'énergie est égale aux puissances mécanique P_m et calorifique P_c qui comportent chacune un terme volumique et un terme surfacique,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho e = \underbrace{\int_{\Omega^t} \rho v \cdot g + \int_{\partial\Omega^t} \sigma v \cdot n}_{P_m} + \underbrace{\int_{\Omega^t} r - \int_{\partial\Omega^t} q \cdot n}_{P_c}.$$

où e est l'énergie interne massique, r est la puissance calorifique volumique et q représente le flux de chaleur² (le signe $-$ provient du fait que la normale est orientée vers l'extérieur). On procède comme dans la démonstration de l'équation de continuité pour reformuler le terme instationnaire. Le théorème de la divergence permet de conclure. \square

1.1.6.5 Second principe de la thermodynamique

Théorème 6. *La forme locale de l'inégalité d'entropie s'écrit*

$$\boxed{\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s v) \geq \frac{1}{T} (r - \operatorname{div}(q))} \quad (1.15)$$

Démonstration. Le second principe, qui décrit l'irréversibilité des phénomènes thermodynamiques, traduit que l'entropie d'un système ne peut qu'augmenter au cours du temps,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho s \geq \int_{\Omega^t} \frac{r}{T} + \int_{\partial\Omega^t} \frac{q \cdot n}{T},$$

où s est l'entropie massique et T la température absolue. On reformule le terme instationnaire et le terme surfacique comme dans la démonstration du premier principe. \square

2. Ce flux dépend de la conductivité thermique λ et de la température T par la loi de Fourier $q = -\lambda \nabla T$.

1.2 Mécanique des fluides

1.2.1 Fluide

En physique, les interactions moléculaires déterminent les différents états de la matière³ :

- l'état *solide* correspond à de faibles interactions puisque les molécules d'un solide occupent des positions relatives fixes dans l'espace,
- l'état *gazeux* correspond à de fortes interactions puisque les molécules d'un gaz suivent des mouvements désordonnés en interagissant par collisions,
- l'état *liquide* correspond à des interactions supérieures à celles d'un solide et inférieures à celles d'un gaz.

La notion de fluide fait référence à l'absence de structure organisée de la matière à l'échelle microscopique en regroupant ainsi les états gazeux et liquide. Le diagramme de phase de la figure 1.7 représente les domaines d'état de l'eau en fonction de la pression et de la température. Un corps pur existe sous un seule phase pour une température et une pression données sauf sur les courbes de changement d'état où deux états coexistent et au point triple où les trois états coexistent. La courbe de fusion-solidification correspond à l'équilibre solide-liquide, celle de vaporisation-liquéfaction correspond à l'équilibre liquide-gazeux et celle de condensation-sublimation correspond à l'équilibre gazeux-solide. En règle générale, les courbes de changement d'état sont croissantes dans le diagramme pression et température. L'eau présente une exception puisque la courbe de fusion-solidification est décroissante ce qui explique notamment que la glace flotte sur l'eau⁴. La courbe de vaporisation-liquéfaction s'interrompt au point critique au-delà duquel les phases fluides et gazeuses ne sont plus distinguables, il s'agit de l'état supercritique.

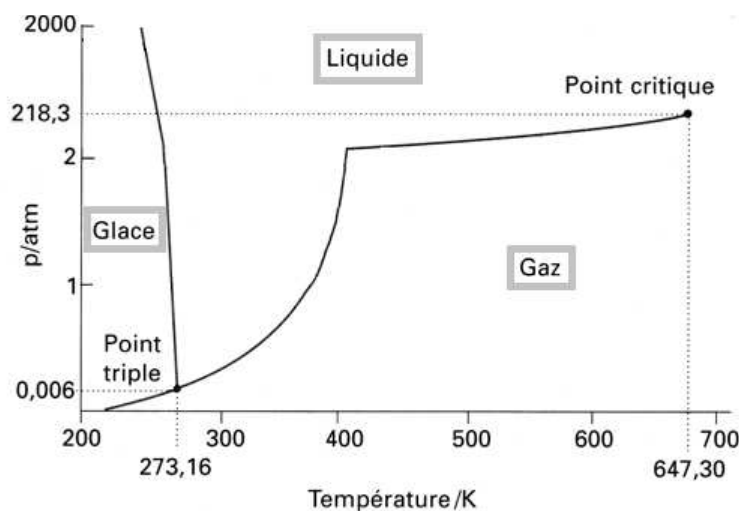


FIGURE 1.7 – Diagramme de phase de l'eau.

3. Aux trois états classiques s'ajoutent d'autres états comme l'état *plasma* (gaz ionisé), l'état *supercritique* (état entre liquide et gazeux) et l'état *cristallin* (solide dont les atomes sont ordonnés suivant un réseau périodique).

4. La pente négative de la courbe de fusion entraîne que le volume molaire du liquide V_l est plus petit que celui du solide V_s d'après la relation de Clapeyron (la quantité $L > 0$ désigne la chaleur latente de fusion) :

$$L = T(V_l - V_s) \frac{dp}{dT} \Rightarrow V_l < V_s \text{ si } \frac{dp}{dT} < 0.$$

En mécanique, un fluide est une substance matérielle qui se déforme lorsqu'elle est soumise à des forces extérieures. Le fluide se différencie du solide qui atteint un état de déformation fixe pour équilibrer l'action des forces extérieures par des tensions internes. L'absence de rigidité du fluide le rend inapte à s'opposer à un cisaillement en résistant au glissement relatif de différentes parties. Un fluide est donc au repos lorsque les actions extérieures peuvent être équilibrées par des forces internes exclusivement normales (pression).

1.2.2 Hypothèses simplificatrices

Le problème décrit dans la section 1.1.6 pour déterminer complètement l'état d'un milieu fluide nécessite de connaître en chaque point du domaine d'études 17 inconnues scalaires,

- **la vitesse** v ($\times 3$),
- **la pression** p ,
- **les contraintes visqueuses** τ ($\times 6$),
- la masse volumique ρ ,
- la température T ,
- le flux thermique q ($\times 3$),
- l'énergie massique e ,
- l'entropie massique s .

Les 5 équations scalaires issues des principes de conservation et indépendantes de la nature du milieu dont nous disposons sont

- **l'équation de continuité** (1.10),
- **l'équation d'équilibre** (1.11) ($\times 3$),
- l'équation d'énergie (1.14).

Nous disposons de 12 équations données par les lois de comportement et les équations d'états et qui caractérisent les propriétés physiques du milieu sans contredire le second principe de la thermodynamique (1.15) :

- **loi mécanique** ($\times 6$),
- loi thermique ($\times 3$),
- équations d'états ($\times 3$).

Il est clair que la résolution du système complet précédent est difficile. En hydrodynamique, la masse volumique et la température de l'eau sont supposées constantes (écoulement incompressible et isotherme) de sorte que l'équation d'énergie (reformulée avec la température) est trivialement satisfaite. Ainsi les 10 inconnues scalaires sont la vitesse, la pression et les contraintes visqueuses qui sont déterminées par les équations de continuité et d'équilibre ainsi que par la loi mécanique (hypothèse des fluides parfaits ou newtoniens) qui doit garantir la symétrie du tenseur des contraintes pour être en accord avec le principe de conservation des moments.

1.2.3 Compressibilité

La compressibilité est la caractéristique d'un corps à varier de volume sous l'effet d'une pression appliquée. Le *coefficient de compressibilité isotherme* χ_T (Pa^{-1}) traduit cette aptitude,

$$\chi_T \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_T,$$

où V est le volume initial du corps soumis à une différence de pression lorsque la température reste constante. Il existe aussi les coefficients de compressibilité isochore et isentropique ainsi que le coefficient de dilatation isobare. Les gaz sont compressibles, les liquides sont peu compressibles et

Corps	air	eau	cuivre
$T(^{\circ}C)$	20	10	15
$\chi_T(Pa^{-1})$	$4.4 \cdot 10^{-5}$	$4.78 \cdot 10^{-10}$	$7.78 \cdot 10^{-12}$

TABLE 1.1 – Exemples de coefficients de compressibilité isotherme.

les solides sont très peu compressibles comme le montrent les valeurs du tableau 1.1. L'hypothèse d'incompressibilité de l'eau est pertinente et conduit par exemple à une erreur relative de la pression au fond de la fosse de Milwaukee⁵ de moins de 2%.

Lorsque le coefficient de compressibilité est très faible (de l'ordre de 10^{-10}), la masse volumique peut être considérée constante et le fluide **incompressible** ce qui entraîne une divergence du champ de vitesse nulle,

$$\text{fluide incompressible} \Leftrightarrow \rho = \text{cste} \Rightarrow \text{div}(v) = 0.$$

Lorsque le champ de vitesse est à divergence nulle, l'écoulement est **solénoïdal**

$$\text{écoulement solénoïdal} \Leftrightarrow \text{div}(v) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho = 0. \quad (1.16)$$

Un tel écoulement ne signifie pas que la masse volumique soit constante. En effet, la relation (1.16) se réduit à $v \cdot \nabla \rho = 0$ en régime permanent (*i.e.* indépendant du temps) ce qui autorise des variations de masse volumique orthogonalement aux lignes de courant comme l'illustre la figure 1.8. C'est le cas des écoulements stratifiés que l'on rencontre dans l'atmosphère et les océans.

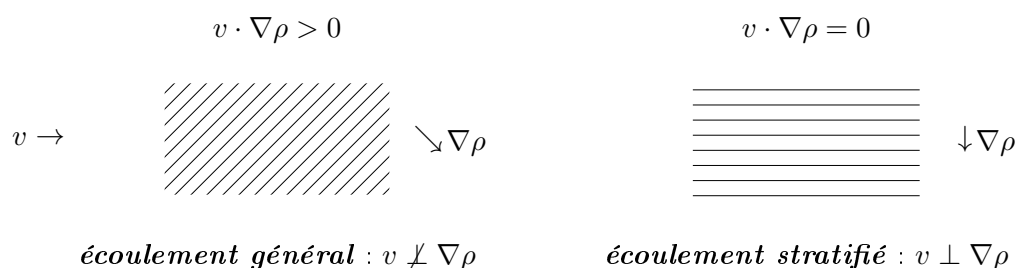


FIGURE 1.8 – Interprétation du terme advectif de la dérivée particulaire.

1.2.4 Quelques définitions

Nous terminons ce chapitre introductif par quelques définitions afin de se familiariser avec les principales notions rencontrées en mécanique des fluides. Ces notions sont approfondies dans la suite de ce cours.

Certaines hypothèses concernant le champ de vitesse permettent de se placer dans des configurations particulières. L'**hydrostatique** est l'étude des fluides immobiles et constitue le chapitre 2. Un écoulement est **permanent** quand le champ de vitesse est indépendant du temps et **transitoire** dans le cas contraire. Un écoulement est **irrotationnel** quand le rotationnel du champ de vitesse est nul et **rotationnel** dans le cas contraire. Un écoulement est **bidimensionnel** si le champ de vitesse est indépendant d'une coordonnée et un écoulement est **plan** si l'une des composantes du champ de vitesse est nulle. Un champ (scalaire, vectoriel ou tensoriel) est **constant** lorsqu'il ne varie pas dans le temps et **uniforme** lorsqu'il ne varie pas dans l'espace.

5. située au nord de Porto Rico, cette fosse est la plus profonde de l'océan Atlantique avec 8605m.

La *viscosité* est la propriété d'un fluide de résister aux forces qui déplacent les unes par rapport aux autres les particules qui le constituent. Lorsque la viscosité augmente, la capacité du fluide à s'écouler diminue. Un *fluide parfait* possède une viscosité nulle alors qu'un *fluide réel* possède une viscosité non nulle. Nous étudions les premiers dans le chapitre 3 et les seconds dans le chapitre 4.

Un écoulement est *laminaire* lorsqu'il ne présente pas de fortes variations spatiales et temporelles. L'écoulement est *turbulent* dans le cas contraire. Le *nombre de Reynolds* permet de distinguer les deux types d'écoulement. Dans ce cours, les écoulements sont supposés laminaires sauf dans la détermination des pertes de charges au chapitre 4 et dans le chapitre 5 consacré aux écoulements turbulents.

Un écoulement à *surface libre* possède une surface en contact avec l'air libre. C'est le cas par exemple des écoulements en canaux et rivières qui sont étudiés au chapitre 6. Le *nombre de Froude* permet de distinguer les écoulements *torrentiels* (faible hauteur d'eau et forte vitesse) des écoulements *fluviaux* (forte hauteur d'eau et faible vitesse).

L'*advection* est le transport d'une quantité q par un champ vectoriel v . Le déplacement d'une matière polluante non miscible dans une rivière est un exemple de transport advectif.

La *diffusion* est le transport de matière tendant à compenser les différences de concentration. Le mélange d'un polluant miscible dans l'eau est un exemple de diffusion.

Chapitre 2

Hydrostatique

L'hypothèse faite en hydrostatique est de considérer le champ de vitesse du fluide nul. Pour les fluides parfaits, nous verrons au chapitre 3 que le tenseur des contraintes visqueuses est supposé nul. Pour les fluides réels (newtoniens) traités au chapitre 4, le tenseur des contraintes visqueuses est proportionnel au tenseur des taux de déformations qui s'exprime uniquement en fonction du gradient de vitesse. L'analyse faite en hydrostatique est ainsi valable pour les fluides parfaits et les fluides réels puisque les contraintes se réduisent aux seules contraintes de pression.

Ce chapitre comporte trois parties. La première partie montre comment l'on aboutit à l'équation de Pascal à partir de l'équation d'équilibre. Nous donnons plusieurs exemples provenant directement de cette équation. La deuxième partie présente le calcul de la résultante des forces de pression sur une surface immergée. Ces résultats sont indispensables pour la conception d'écluses, de barrages et de digues. Cette partie rappelle aussi le célèbre principe d'Archimède qui permet l'étude de la flottabilité des corps. Nous terminons par la notion de tension superficielle qui explique les phénomènes capillaires.

2.1 Equation de l'hydrostatique

2.1.1 Equilibre dans le cas général

Théorème 7. *La pression dans un fluide au repos vérifie*

$$p + \rho U = C,$$

où U est le potentiel dont dérivent les forces extérieures et la constante C est une pression de référence.

Démonstration. Le fluide étant au repos, l'accélération et le tenseur des contraintes visqueuses sont nulles de sorte que l'équation d'équilibre (1.11) se simplifie considérablement,

$$\left. \begin{array}{l} \rho F + \operatorname{div}(\sigma) = 0 \quad \text{car } a = 0 \\ \sigma = -pI \quad \text{car } \tau = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \nabla p = F \quad \text{car } \operatorname{div}(pI) = \nabla p. \quad (2.1)$$

Les trois composantes de l'équation (2.1) s'écrivent

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = F_x, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = F_y, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = F_z \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

La masse volumique étant constante, la différentielle totale¹ de la pression dp apparaît,

$$\frac{dp}{\rho} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (2.2)$$

Le membre de droite de cette égalité doit aussi être une différentielle totale notée $-dU$. En explicitant l'expression de dU , nous obtenons que les forces extérieures F dérivent du potentiel U , c'est-à-dire que $F = -\nabla U$ (cf. Annexe A.3 pour un rappel sur les forces conservatives). L'équation de l'hydrostatique s'écrit finalement dans le cas général :

$$dp + \rho dU = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p + \rho U = C.$$

□

Notons que les surfaces *isobares* ($p=\text{cste}$) sont les surfaces *équipotentielles* ($U=\text{cste}$).

2.1.2 Equation de Pascal

L'équation de Pascal (mathématicien, physicien et philosophe français, 1623–1662) est obtenue en supposant que la seule force extérieure est la gravité.

Théorème 8. *La pression dans un fluide au repos soumis uniquement à la gravité vérifie*

$$\boxed{p + \rho gz = C} \text{ si l'axe } Oz \text{ est ascendant} \quad \text{et} \quad \boxed{p = \rho gz + C} \text{ si l'axe } Oz \text{ est descendant,}$$

où la constante C est une pression de référence.

Démonstration. La force de pesanteur massique dérive du potentiel gravitaire par unité de masse qui a pour expression $\pm gz$ et dont le signe est déterminé par l'orientation de l'axe vertical.

$$\left. \begin{array}{l} p + \rho U = C \\ U = \pm gz \end{array} \right\} \Rightarrow p \pm \rho gz = C.$$

□

Une conséquence immédiate de l'équation de Pascal est que la pression augmente avec la profondeur (et diminue avec l'altitude). Par ailleurs, la constante dans l'équation est fixée par une valeur connue de la pression à une altitude donnée. La figure 2.1 montre deux exemples :

1. l'axe Oz est orienté vers le haut et la constante est la pression du fond p_f ,
2. l'axe Oz est orienté vers le bas et la constante est la pression de la surface libre p_0 .

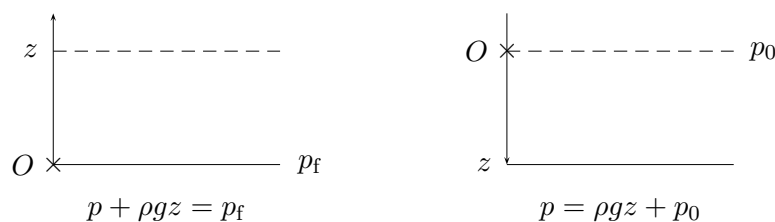


FIGURE 2.1 – Equation de Pascal suivant deux configurations différentes.

1. La différentielle totale df d'une fonction f est définie par $df \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f \cdot dx$

Le *diagramme de pression* représente la pression en fonction de l'altitude. Cette représentation est indépendante de l'orientation de l'axe vertical mais dépend de la masse volumique du fluide et de la pression de référence comme l'illustre la figure 2.2. La pression est *absolue* lorsque la pression atmosphérique est égale à $101325Pa$ alors qu'elle est *relative* lorsque la pression atmosphérique est choisie nulle. Il est souvent judicieux de considérer la pression relative notamment pour déterminer les forces de pression exercées par l'eau sur un ouvrage.

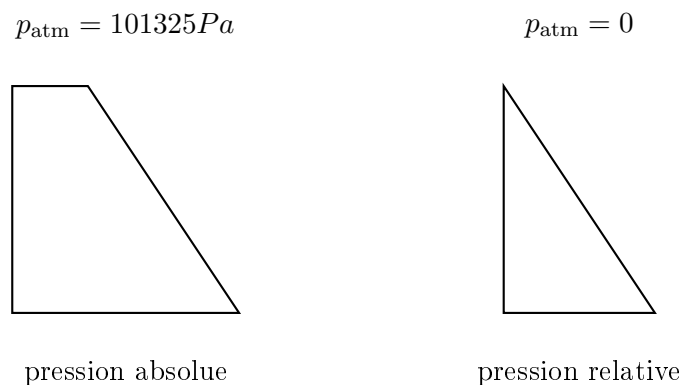


FIGURE 2.2 – Diagramme de pression.

Une application numérique montre que la pression augmente d'une atmosphère à chaque fois que nous plongeons d'une dizaine de mètres sous la mer. En effet, la pression atmosphérique p_0 étant égale à $101325Pa$ et la masse volumique de l'eau étant environ $1000kg.m^{-1}$, nous obtenons que la pression à $10m$ vaut $1.97atm$ en prenant $g = 9.81m.s^{-2}$. C'est la raison pour laquelle les plongeurs doivent faire particulièrement attention lors des premiers mètres : lors de la première dizaine de mètres, la pression passe de une à deux atmosphères ; lors de la deuxième dizaine de mètres, la pression passe de deux à trois atmosphères et ainsi de suite.

2.1.3 Applications

Le principe des vases communicants, la différence de pression entre deux points dans un fluide au repos ainsi que le fonctionnement des appareils de mesure de pression (tube piézométrique, manomètres, baromètre) et de la presse hydraulique reposent sur l'équation de Pascal.

2.1.3.1 Principe des vases communicants

Si deux vases remplis d'un même liquide communiquant par un tube ont leurs surfaces libres à la même pression, alors les surfaces libres sont à la même altitude,

$$p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B \quad \Rightarrow \quad z_A = z_B \quad \text{si} \quad p_A = p_B$$



FIGURE 2.3 – Principe des vases communicants.

2.1.3.2 Différence de pression entre deux points d'un même fluide

Dans un même fluide, la différence de pression entre deux points est égale au poids d'une colonne de fluide de section unité et de hauteur l'écart entre les altitudes de ces points,

$$p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B \quad \Rightarrow \quad p_B - p_A = \rho g h \quad \text{avec} \quad h = z_A - z_B$$

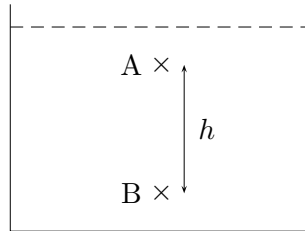


FIGURE 2.4 – Différence de pression entre deux points d'un même fluide.

Ce résultat, qui n'est plus valable entre deux fluides de masses volumiques différentes, montre qu'il est possible d'exprimer les pressions en hauteur de fluide équivalente.

2.1.3.3 Appareils de mesure de pression

Un tube piézométrique relié à une enceinte \mathcal{E} mesure la pression au sein de cette enceinte en exploitant simplement que la pression dépend de la hauteur de fluide qui se trouve dans ce tube,

$$p_{\mathcal{E}} = p_A + \rho g h$$

Cet appareil est inapproprié pour de fortes pressions car la hauteur devient trop grande et c'est le manomètre simple qui permet de telles mesures grâce à la présence d'un liquide de densité élevée ρ_2 dans le tube relié à l'enceinte,

$$\left. \begin{array}{l} p_{\mathcal{E}} = p_A + \rho_1 g h_1 \\ p_A = p_B + \rho_2 g h_2 \end{array} \right\} \Rightarrow p_{\mathcal{E}} = p_B + g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)$$

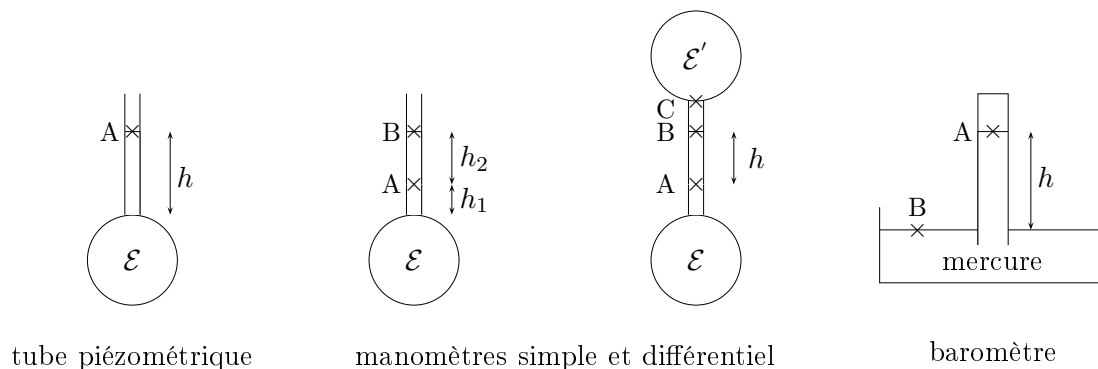


FIGURE 2.5 – Schémas de principe des appareils de mesures de pression.

Le manomètre différentiel mesure l'écart de pression entre deux enceintes \mathcal{E} et \mathcal{E}' ,

$$\left. \begin{array}{l} p_{\mathcal{E}} + \rho_1 g z_0 = p_A + \rho_1 g z_A \\ p_A + \rho_2 g z_A = p_B + \rho_2 g z_B \\ p_B + \rho_1 g z_B = p_{\mathcal{E}'} + \rho_1 g z_C \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{p_{\mathcal{E}}}{\rho_1 g} + z_0 \right) - \left(\frac{p_{\mathcal{E}'}}{\rho_1 g} + z_C \right) = h \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$$

Le baromètre mesure la pression atmosphérique qui est équilibrée par une colonne de mercure, de masse volumique ρ_m , surmontée d'un espace clos et vide ayant une pression nulle,

$$p_B = \rho_m g h \quad \text{car} \quad p_A = 0$$

2.1.3.4 Presse hydraulique

Une presse hydraulique comporte généralement deux pistons de surface différente. En négligeant l'action de la pesanteur et en supposant que les forces sont uniformément réparties sur les pistons, il est trivial de montrer avec l'équation de Pascal qu'une petite force sur le petit piston permet d'obtenir une grande force sur le grand piston. Une application numérique montre qu'en exerçant une force de $1N$ sur $0.01m^2$, on obtient une force de $100N$ sur $1m^2$.

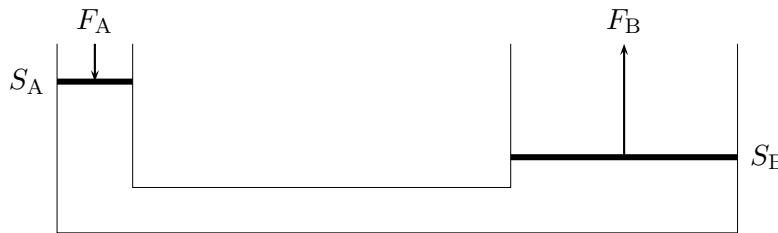


FIGURE 2.6 – Schéma d'une presse hydraulique.

$$z_A \simeq z_B \quad \Rightarrow \quad p_A = p_B \quad \Rightarrow \quad F_B = F_A \frac{S_B}{S_A}$$

2.2 Résultante des forces de pression

2.2.1 Surface plane

Soit une surface plane \mathcal{S} immergée dans un liquide de masse volumique ρ . L'objectif est de calculer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur les deux faces de cette surface. Ces deux forces sont évidemment égales et opposées sauf si le fluide ne baigne qu'une seule face de cette surface. Nous désignons par S l'aire de \mathcal{S} , par G son centre de gravité et par n sa normale unitaire sortante.

On se place dans le plan \mathcal{P} contenant \mathcal{S} . L'axe Ox fait un angle α par rapport à la surface libre et l'axe Oy se situe au niveau de la surface libre. Nous désignons par M un point quelconque de \mathcal{S} et notons h sa profondeur et x son abscisse (voir la figure 2.7). Nous rappelons que l'abscisse x_G du centre de gravité d'une surface quelconque \mathcal{S} est

$$x_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{S} \int_{\mathcal{S}} x \, dS.$$

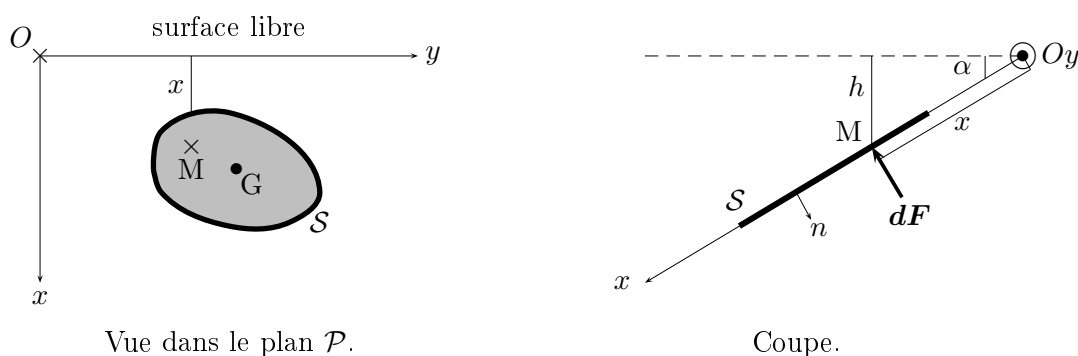


FIGURE 2.7 – Vue et coupe de la surface plane immergée.

Propriété 4. *La direction de la résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface plane immergée est perpendiculaire à cette surface. Le sens de cette résultante est du fluide vers la surface.*

Théorème 9. *Le module de la résultante des forces de pression sur une surface plane immergée a pour valeur la pression p_G du centre de gravité de la surface multipliée par l'aire S de cette surface :*

$$|F| = p_G S.$$

Démonstration. La force élémentaire dF s'exerçant sur un petit élément de surface dS autour du point M s'exprime en fonction de la pression au point M qui est donnée par l'équation de Pascal :

$$dF \stackrel{\text{def}}{=} -pndS = -\rho ghndS.$$

Toutes les forces élémentaires de pression étant perpendiculaires au plan \mathcal{P} , la résultante totale est égale à la somme des forces élémentaires :

$$F = \int_S dF = - \int_S \rho ghndS = -\rho g \sin(\alpha)n \int_S x dS.$$

En utilisant la définition de l'abscisse du centre de gravité, et en désignant par h_G la profondeur du centre de gravité, nous obtenons

$$F = -\rho gh_G n S.$$

□

La résultante des forces de pression ne s'applique pas au centre de gravité car la pression n'est pas uniformément répartie sur S .

Théorème 10. *Le point d'application de la résultante des forces de pression F sur S s'appelle le centre de poussée et sa position est définie par*

$$x_P = x_G + \frac{I_{S/\Delta}}{Sx_G},$$

avec $I_{S/\Delta}$ moment d'inertie de S par rapport à un axe passant par G et parallèle à l'axe Oy .

Démonstration. Pour déterminer le point d'application de la résultante des forces de pression sur la surface \mathcal{S} , nous utilisons le théorème de Varignon (mathématicien français, 1654–1722), connu également sous le nom de « principe des moments ».

Théorème de Varignon. Soit F une force définie comme la somme de forces élémentaires dF . Le moment \mathcal{M}_P^F de la force F par rapport à un point P est égal à la somme des moments \mathcal{M}_P^{dF} des forces dF par rapport à ce même point,

$$\mathcal{M}_P^F = \int \mathcal{M}_P^{dF}.$$

Dans notre cas, nous calculons ces deux quantités par rapport au point O . Le moment de F par rapport à O est

$$\mathcal{M}_O^F = Fx_P = -\rho gh_G n S x_P = -\rho g \sin(\alpha) x_G x_P n S. \quad (2.3)$$

De même, le moment d'une force élémentaire dF par rapport à O est

$$\mathcal{M}_O^{dF} = dF x = -\rho g h n dS x = -\rho g \sin(\alpha) x^2 n dS. \quad (2.4)$$

En utilisant les équations (2.3) et (2.4) et le théorème de Varignon, nous obtenons que l'abscisse du centre de poussée vérifie l'égalité

$$x_G x_P S = \int_{\mathcal{S}} x^2 dS. \quad (2.5)$$

Il reste à évaluer l'intégrale de x^2 sur la surface \mathcal{S} . Utilisons pour cela le moment d'inertie $I_{S/\Delta}$ de \mathcal{S} par rapport à l'axe Δ passant par G et parallèle à Oy

$$I_{S/\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{S}} (x - x_G)^2 dS \Rightarrow \int_{\mathcal{S}} x^2 dS = I_{S/\Delta} + 2x_G \int_{\mathcal{S}} x dS - x_G^2 \int_{\mathcal{S}} dS = I_{S/\Delta} + x_G^2 S. \quad (2.6)$$

Les équations (2.5) et (2.6) donnent

$$x_G x_P S = I_{S/\Delta} + x_G^2 S.$$

□

2.2.2 Surface quelconque

Nous considérons maintenant une surface quelconque et notons F_x , F_y et F_z , les trois composantes de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur cette surface comme indiqué sur la figure 2.8. Ces résultats permettent de déterminer par exemple la résultante des forces de pression sur une écluse, un barrage, une digue ou une voûte.

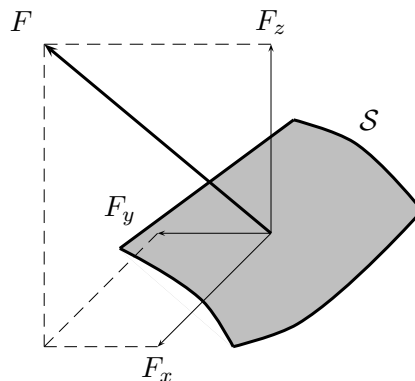


FIGURE 2.8 – Force de pression sur une surface quelconque immergée.

Théorème 11. *La composante verticale de la résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface quelconque immergée est égale au poids du volume de fluide situé au-dessus de cette surface.*

Démonstration. Pour déterminer la composante verticale F_z de la force F , construisons un volume imaginaire dont les génératrices verticales s'appuient sur la surface \mathcal{S} et s'arrêtent au niveau de la surface libre du fluide. La projection de la surface \mathcal{S} sur la surface libre Π_z est notée \mathcal{S}_z (voir la figure 2.9).

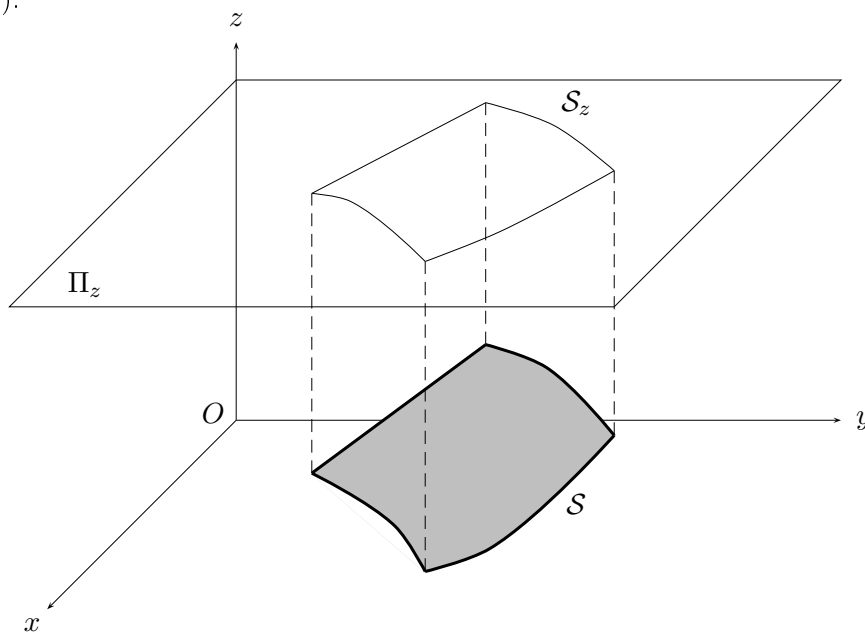


FIGURE 2.9 – Projection de la surface \mathcal{S} suivant la verticale.

Les forces qui s'appliquent sur le volume construit sont

- le poids du volume de fluide situé au-dessus de la surface \mathcal{S} ,
- les forces sur les faces latérales verticales,
- la force F sur la surface \mathcal{S} .

Le résultat est direct car les seules forces verticales sont le poids du volume de fluide et F_z . \square

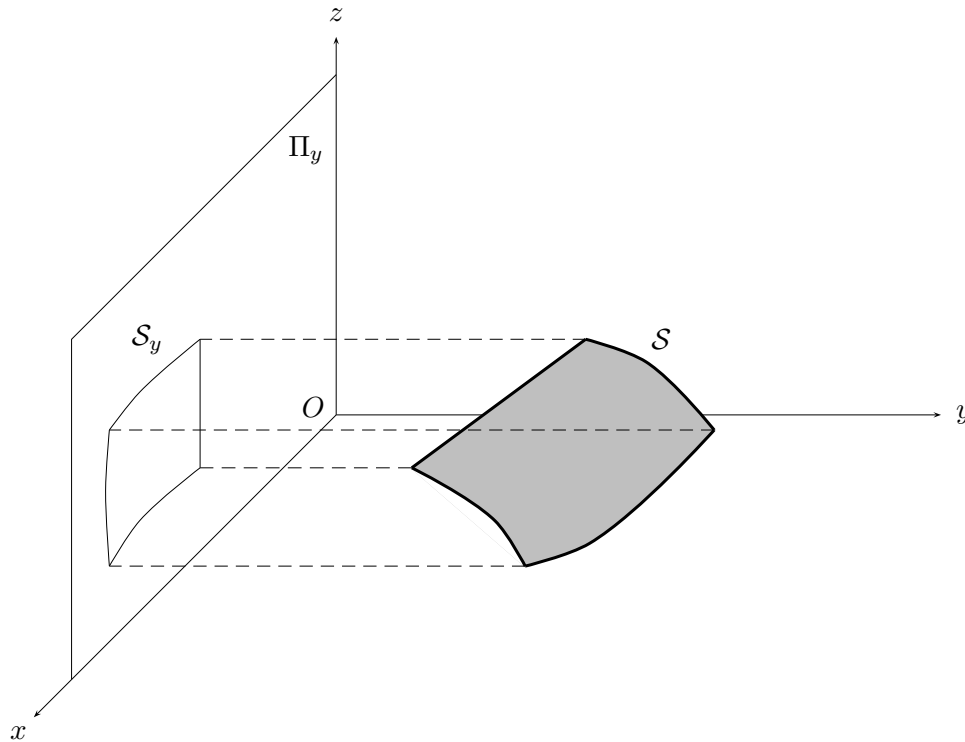
Théorème 12. *La composante horizontale, selon une direction quelconque D , de la résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface quelconque immergée \mathcal{S} est égale à la résultante des forces de pression qui s'exercerait sur une surface plane verticale, projection de \mathcal{S} sur un plan perpendiculaire à D .*

Démonstration. Pour déterminer la composante horizontale F_y de la force F , construisons un volume imaginaire dont les génératrices horizontales s'appuient sur la surface \mathcal{S} et s'arrêtent au niveau d'un plan perpendiculaire à la direction Oy et noté Π_y . La projection de la surface \mathcal{S} sur ce plan est notée \mathcal{S}_y (voir la figure 2.10). Les forces qui s'appliquent sur le volume construit sont

- le poids du volume de fluide,
- les forces sur les faces latérales verticales,
- la force F sur la surface \mathcal{S} ,
- la force sur la surface plane verticale \mathcal{S}_y .

Le résultat est immédiat puisque les seules forces horizontales sont la composante F_y et la composante suivant la direction Oy de la force s'appliquant sur la surface \mathcal{S}_y .

\square

FIGURE 2.10 – Projection de la surface \mathcal{S} suivant une direction horizontale.

2.2.3 Principe d'Archimède

Le principe d'Archimède (savant grec, 3^{ème} siècle av. J-C.) permet de déterminer la résultante des forces de pression qui s'exerce sur un volume. Ses domaines d'applications concernent la flottabilité des corps dans un fluide comme c'est le cas pour les navires ainsi que les montgolfières et les dirigeables. La détermination de la masse volumique d'un fluide avec un densimètre utilise également la poussée d'Archimède.

Principe d'Archimède. *Tout solide immergé dans un fluide au repos subit de la part de ce dernier une force verticale ascendante égale au poids du volume de fluide déplacé. Cette force est la poussée d'Archimède.*

Démonstration. Nous considérons un volume quelconque \mathcal{V} de frontière $\partial\mathcal{V}$ plongé entièrement dans un fluide de masse volumique ρ soumis au champ de pesanteur $\mathbf{g} \stackrel{\text{def}}{=} (0, 0, g)^\top$. La résultante des forces de pression F exercées sur le volume est définie par

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathcal{V}} dF = - \int_{\partial\mathcal{V}} pndS \quad \text{car } dF \stackrel{\text{def}}{=} -pndS.$$

Multiplions l'intégrale précédente par un champ de vecteur uniforme non nul u :

$$\int_{\partial\mathcal{V}} pndS \cdot u = \int_{\partial\mathcal{V}} pu \cdot ndS = \int_{\mathcal{V}} \text{div}(pu)dV = \int_{\mathcal{V}} \nabla p \cdot u dV \quad \text{car } \text{div}(u) = 0.$$

D'après l'équation de Pascal (axe vertical orienté vers le haut), $\nabla p = -\rho\mathbf{g}$ de sorte que nous obtenons

$$F = g \int_{\mathcal{V}} \rho dV = M_{\mathcal{V}}g,$$

où $M_{\mathcal{V}}$ désigne la masse du volume \mathcal{V} . □

Le densimètre permet de mesurer la densité d'un liquide et son fonctionnement repose sur le principe d'Archimède. Il s'agit d'un instrument de verre constitué d'une enceinte lestée de volume V reliée à un tube fin de rayon r . La hauteur h dont est immergé le tube dépend de la densité ρ du liquide dans lequel il est plongé.

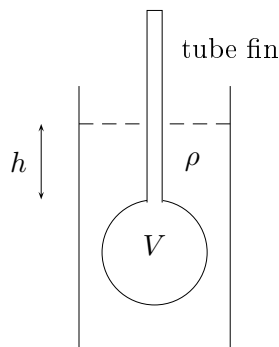


FIGURE 2.11 – Mesure de la masse volumique d'un fluide avec un densimètre.

La masse du densimètre est notée m et la tension superficielle (§ 2.3) est suffisamment faible pour être négligée. L'équilibre du poids et de la poussée d'Archimède s'écrit

$$mg = \rho g(V + h\pi r^2) \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V + h\pi r^2}.$$

2.3 Tension superficielle

2.3.1 Motivation

La statique des fluides est mise en défaut dans certaines situations comme le montrent les exemples de la figure 2.12. En effet, lorsqu'un tube capillaire (tube de quelques millimètres de diamètre) est plongé dans un récipient contenant un liquide, la hauteur de liquide dans le tube diffère de celle du récipient. Par ailleurs, la surface libre dans un tube à essai n'est pas exactement horizontale et des gouttes de liquide sur un plan horizontal ne s'étalent pas.

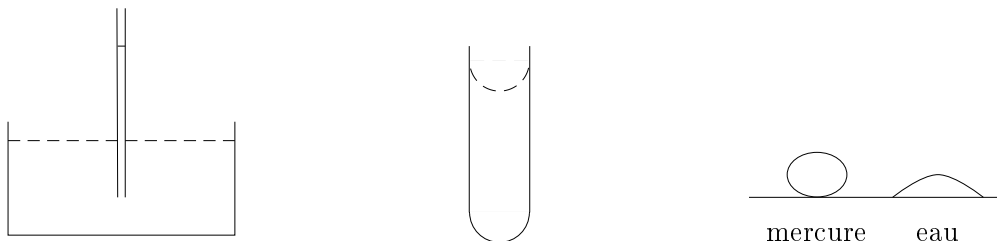


FIGURE 2.12 – Illustrations de la tension superficielle.

L'origine microscopique de ces comportements résulte de la dissymétrie des forces de Van der Waals (physicien néerlandais, 1837–1923) à l'interface entre le liquide et l'air. En effet, une molécule à l'intérieur d'un liquide subit de la part des molécules voisines des forces d'attraction qui se compensent de sorte que la résultante moyenne est nulle. En revanche, pour une molécule proche

de l'interface liquide - air, les forces d'attraction dues aux molécules du liquide sont beaucoup plus grandes que celles des molécules de l'air qui sont moins nombreuses et plus éloignées. Cette dissymétrie fait replonger la molécule proche de la surface vers l'intérieur comme l'illustre la figure 2.13.

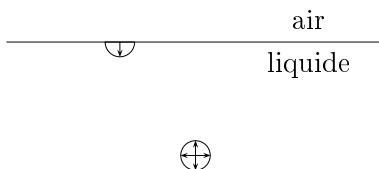


FIGURE 2.13 – Origine microscopique de la tension superficielle.

Le liquide fournit ainsi de l'énergie pour ramener une molécule en surface et créer l'interface. Cette énergie superficielle E_s est proportionnelle à l'aire S de l'interface :

$$E_s = \gamma S.$$

Le coefficient de proportionnalité $\gamma [J \cdot m^{-2}]$ s'appelle la *tension superficielle*. Tout liquide tend à minimiser son énergie superficielle ce qui explique par exemple la forme sphérique des gouttes d'eau puisque la sphère est la surface minimale enfermant une quantité de matière donnée.

2.3.2 Forces de tension superficielle

Nous présentons les principaux résultats concernant la tension superficielle :

- la loi de Laplace exprime que la différence de pression à l'interface entre deux phases est le produit de la tension superficielle entre ces phases par la courbure moyenne,
- la loi de Jurin (médecin anglais, 1684–1750) concerne l'ascension et la dépression capillaire puisqu'elle fournit la hauteur (positive ou négative) de liquide dans un tube fin plongé dans un récipient rempli de ce liquide,
- la formule de Young (physicien anglais, 1773–1829) porte sur le mouillage des solides : l'étalement d'une goutte de liquide posée sur une surface horizontale dépend du liquide, de la surface du solide et du gaz en contact.

Loi de Laplace. *A la traversée de la surface de séparation de deux phases, la pression subit un accroissement, de la face convexe à la face concave, égal à la tension superficielle de l'interface multipliée par la courbure moyenne,*

$$\delta p = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Démonstration. Considérons un élément de surface courbé dont les rayons de courbure sont r_1 et r_2 dans deux directions orthogonales. Compte-tenu des notations de la figure 2.14, l'équilibre des forces de pression exercées sur la surface avec les forces linéiques de tension de surface s'écrit

$$(p_{\text{int}} - p_{\text{ext}})dl_1 dl_2 = 2f_1 \cos(\alpha_1) + 2f_2 \cos(\alpha_2).$$

En utilisant que $f_1 = \gamma dl_2$, $f_2 = \gamma dl_1$ et en notant $\delta p = p_{\text{int}} - p_{\text{ext}}$, l'équation précédente devient

$$\delta p = 2\gamma \left(\frac{\cos(\alpha_1)}{dl_1} + \frac{\cos(\alpha_2)}{dl_2} \right).$$

On termine la preuve grâce aux égalités $dl_1 = 2r_1 \cos(\alpha_1)$ et $dl_2 = 2r_2 \cos(\alpha_2)$. \square

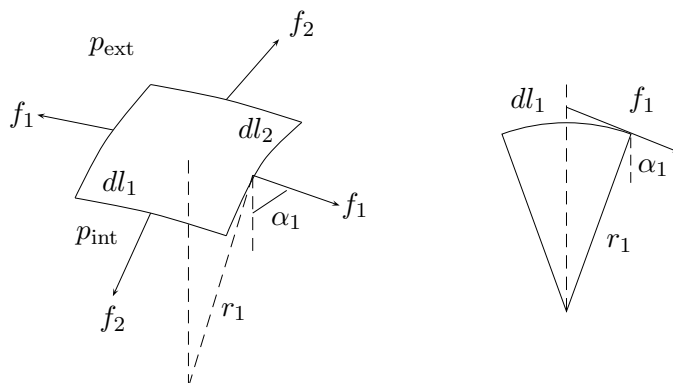


FIGURE 2.14 – Equilibre des forces d'un élément de surface.

Loi de Jurin. La hauteur h de liquide dans un tube capillaire plongé dans ce liquide est proportionnelle à la tension de surface et inversement proportionnelle au rayon r du tube capillaire,

$$h = \frac{2\gamma \cos(\theta)}{\rho g r},$$

où θ est l'angle de mouillage.

Démonstration. La loi de Laplace entre les points A et B s'écrit

$$p_A - p_B = \frac{2\gamma}{R},$$

dans lequel R désigne le rayon du ménisque assimilé à une sphère et vérifie $R \cos(\theta) = r$. L'équation de Pascal entre les points B et C s'écrit

$$p_C = p_B + \rho g h.$$

Les points A et C étant la pression atmosphérique ($p_A = p_C$), nous obtenons

$$\rho g h = \frac{2\gamma \cos(\theta)}{r}.$$

\square

formule de Young. L'angle d'étalement θ d'une goutte de fluide sur une surface solide est donnée par la relation

$$\gamma_{SL} + \gamma_{LG} \cos(\theta) = \gamma_{SG},$$

où γ_{SL} , γ_{LG} et γ_{SG} désignent les tensions superficielles des phases solide-liquide, liquide-gaz et solide-gaz.

Démonstration. La formule de Young est simplement la condition d'équilibre des trois phases. \square

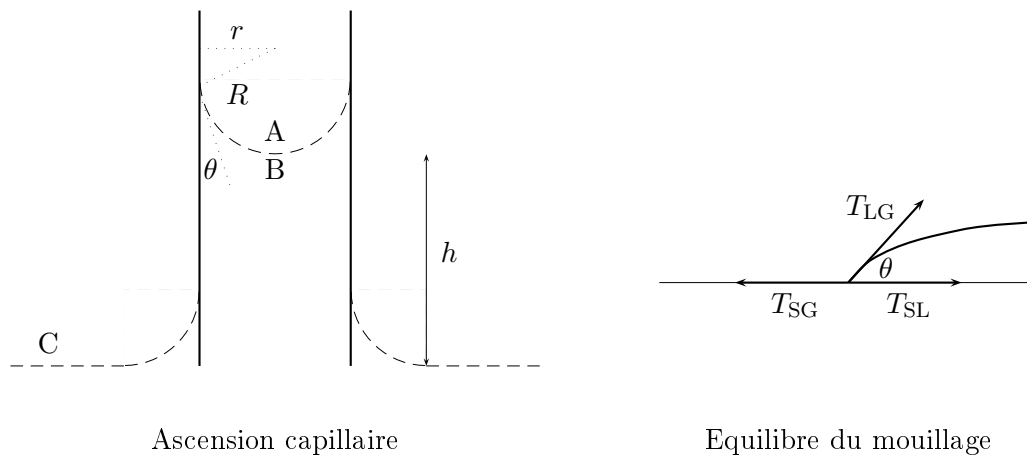


FIGURE 2.15 – Illustrations de la loi de Jurin et de la formule de Young.

Chapitre 3

Fluides parfaits

Un fluide est dit parfait lorsqu'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de la viscosité. Ce modèle est particulièrement bien adapté à la description des écoulements lorsque les gradients de vitesse sont suffisamment faibles pour pouvoir négliger les frottements internes du fluide. L'hypothèse des fluides parfaits est donc de considérer que le tenseur des contraintes se réduit aux contraintes de pression.

Ce chapitre s'organise en cinq parties. Nous commençons par l'équation d'Euler qui gouverne les écoulements des fluides parfaits. Nous détaillons ensuite le théorème de Bernoulli avec quelques applications. Puis, nous indiquons le théorème d'Euler qui permet de déterminer les forces de pression sur un solide. Enfin, nous exposons la description des mouvements irrotationnels et irrotationnels plans qui utilisent des éléments de l'analyse complexe.

3.1 Equation d'Euler

Théorème 13. *L'équation d'équilibre dans un fluide parfait est*

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v + \frac{1}{\rho} \nabla p = F.} \quad (3.1)$$

Démonstration. L'équation d'équilibre est

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho F + \operatorname{div}(\sigma).$$

D'après l'hypothèse des fluides parfaits, le tenseur des contraintes se réduit aux contraintes de pression,

$$\sigma = -pI.$$

En introduisant cette expression des contraintes dans l'équation d'équilibre et en explicitant la dérivée particulaire de la vitesse, nous obtenons l'équation souhaitée. \square

Pour déterminer les champs de vitesse et de pression, l'équation d'Euler et l'équation de continuité sont résolues en imposant des *conditions initiales* et *des conditions aux limites*. Les conditions initiales (v^0, p^0) donnent l'état du fluide à l'instant initial :

$$v(\cdot, 0) = v^0 \quad \text{et} \quad p(\cdot, 0) = p^0,$$

et les conditions aux limites indiquent l'état du fluide à la frontière du domaine d'étude. Dans le cas d'un écoulement en domaine ouvert, les conditions aux limites sont

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} v(x, \cdot) = v_\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} p(x, \cdot) = p_\infty.$$

La *condition d'imperméabilité* s'applique au niveau d'une paroi imperméable dans un écoulement de fluide parfait,

$$v \cdot n = 0,$$

où n désigne la normale extérieure unitaire à la paroi. Cette relation résulte de l'équation de continuité intégrée sur un volume limité par deux éléments de surface situés de part et d'autre de la paroi et parallèles à celle-ci. Pour un fluide parfait, aucune condition n'est à imposer sur les composantes tangentielles de la vitesse ce qui autorise le glissement du fluide parallèlement à la paroi de sorte que la condition $v \cdot n = 0$ s'appelle aussi *condition de glissement*.

3.2 Théorème de Bernoulli

3.2.1 Enoncé

Le théorème de Bernoulli (physicien et mathématicien suisse, 1700–1782) traduit la *conservation de l'énergie* :

Théorème de Bernoulli. *Dans un écoulement permanent de fluide parfait incompressible soumis uniquement à la gravité, nous avons*

$$\boxed{\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = C,} \quad (3.2)$$

où la constante C [m] est une hauteur de référence.

Cette relation est valable - partout si l'écoulement est irrotationnel,
- le long d'une ligne de courant si l'écoulement est rotationnel.

Démonstration. Le terme advectif peut être reformulé en faisant apparaître l'advection par translation ($\frac{1}{2}\nabla v^2 = D_{\text{diag}}v$) et l'advection par rotation,

$$v \cdot \nabla v = \underbrace{\frac{1}{2}\nabla v^2}_{\text{translation}} + \underbrace{\text{rot}(v) \wedge v}_{\text{rotation}}.$$

En supposant que le fluide n'est soumis qu'à la pesanteur, l'équation d'Euler s'écrit

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 + \text{rot}(v) \wedge v + \frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla(gz). \quad (3.3)$$

Dans le cas d'un écoulement permanent irrotationnel, cette équation se simplifie

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = C.$$

La quantité précédemment introduite est homogène à une longueur. Elle est notée H et s'appelle la *charge hydraulique* :

$$\boxed{H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z.} \quad (3.4)$$

Dans le cas d'un écoulement permanent rotationnel, l'équation (3.3) se réécrit

$$\text{rot}(v) \wedge v + \nabla H = 0.$$

En multipliant par un déplacement $dl \stackrel{\text{def}}{=} (dl_x, dl_y, dl_z)^\top$ le long d'une ligne de courant \mathcal{C} , nous avons

$$(\text{rot}(v) \wedge v) \cdot dl + \nabla H \cdot dl = 0. \quad (3.5)$$

Pour montrer que le premier terme de cette équation est nul, nous utilisons le produit mixte et la colinéarité de v et dl : $(\text{rot}(v) \wedge v) \cdot dl = \text{rot}(v) \cdot (v \wedge dl) = 0$. Ainsi, l'équation (3.5) devient

$$\nabla H \cdot dl = 0, \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{C}} \nabla H \cdot dl = \int_{\mathcal{C}} dH = 0 \quad \Rightarrow \quad H = C \quad \text{le long de } \mathcal{C}.$$

□

L'énergie totale de l'écoulement est présente sous trois formes. En multipliant la charge hydraulique par $\rho g dV$ (dV désignant une partie du fluide), les *énergies cinétique, élastique et potentielle* apparaissent :

$$\underbrace{\rho v^2 dV / 2}_{\text{E. cinétique}} + \underbrace{p dV}_{\text{E. élastique}} + \underbrace{\rho g z dV}_{\text{E. potentielle}} = \underbrace{C_1}_{\text{E. totale}}$$

Le pression totale se décompose en deux termes. En multipliant la charge hydraulique par ρg , les *pressions dynamique et statique* apparaissent :

$$\underbrace{\rho v^2 / 2}_{\text{p. dynamique}} + \underbrace{p + \rho g z}_{\text{p. statique}} = \underbrace{C_2}_{\text{p. totale}}$$

Lorsque la vitesse du fluide est nulle, le théorème de Bernoulli se réduit à l'équation de Pascal (cf. § 2.1.2) puisque la pression dynamique est nulle.

Pour se placer en régime permanent dans le cas des écoulements tournants (pompe et turbine par exemple), il convient d'ajouter la force centrifuge que nous allons expliciter. Pour déterminer cette force, nous étudions le mouvement d'une particule fluide P autour de l'axe Oz à une vitesse angulaire constante $w = \omega e_z$. Dans le repère $R = (O, e_x, e_y, e_z)$ lié à la rotation, le point P a pour coordonnées $(x, 0, 0)^\top$. Le repère $R = (O, e_X, e_Y, e_Z)$ est supposé fixe.

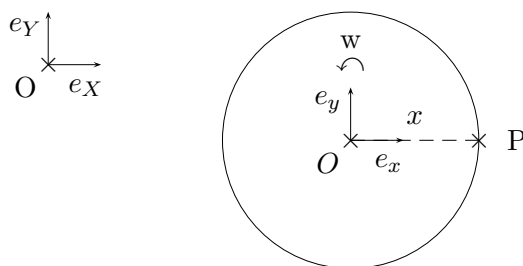


FIGURE 3.1 – Particule fluide en rotation.

L'accélération engendrée par la rotation est calculée à l'aide de la loi de Poisson¹.

Loi de Poisson.

$$\forall e \in \{e_x, e_y, e_z\}, \quad \left(\frac{de}{dt} \right)_R = w \wedge e.$$

1. déduite de la relation de dérivation vectorielle $\left(\frac{du}{dt} \right)_R = \left(\frac{du}{dt} \right)_R + w \wedge u$, où u est un vecteur quelconque.

Cette loi permet de calculer la dérivée seconde de e_x ,

$$\frac{de_x}{dt} = \omega e_y \quad \text{et} \quad \frac{de_y}{dt} = -\omega e_x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 e_x}{dt^2} = -\omega^2 e_x.$$

Le signe négatif indique qu'il s'agit de l'accélération centripète puisqu'elle est dirigée vers le centre de courbure. La force centrifuge massique a donc pour expression $F_{\text{cent}} = x\omega^2 e_x$ et dérive du potentiel suivant

$$U_{\text{cent}} = -\frac{x^2 \omega^2}{2} = -\frac{v_{\text{rot}}^2}{2} \quad \text{avec} \quad v_{\text{rot}} \stackrel{\text{def}}{=} x\omega.$$

Pour prendre en compte cette force, il convient donc d'ajouter le potentiel $\frac{1}{2}v_{\text{rot}}^2$ au second membre de l'équation (3.3). Ainsi le théorème de Bernoulli prenant en compte la force centrifuge s'écrit

$$\boxed{\frac{v^2 - v_{\text{rot}}^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = C.} \quad (3.6)$$

3.2.2 Applications

Nous présentons plusieurs exemples faisant intervenir le théorème de Bernoulli : la formule de Toricelli estime la vitesse de sortie d'un fluide à l'orifice d'un réservoir, le tube de Pitot permet de mesurer la vitesse dans un écoulement et le tube de Venturi permet de mesurer le débit dans un écoulement. Le temps de vidange d'un réservoir est également estimé en utilisant la formule de Toricelli. Dans ces différents cas, le théorème de Bernoulli est applicable dans tout l'écoulement qui est supposé permanent irrotationnel et dans lequel les pertes de charges sont négligeables (nous reportons au chapitre 4 pour la définition des pertes de charges).

3.2.2.1 Formule de Toricelli (Physicien et mathématicien italien, 1608–1647)

Soit un réservoir de grande taille à paroi mince, muni d'un orifice plat. Soient A un point situé au niveau de la surface libre et B un point situé à l'orifice. Nous supposons que

1. le réservoir est suffisamment grand de sorte que la vitesse en A est nulle,
2. les pressions aux points A et B sont égales à la pression atmosphérique.

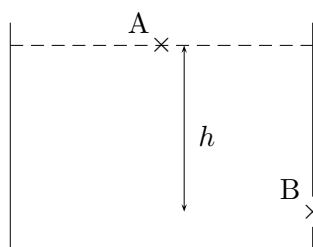


FIGURE 3.2 – Vidange d'un réservoir.

L'application du théorème de Bernoulli entre les points A et B donne directement la vitesse de sortie du fluide à l'orifice qui varie comme la racine carrée de la hauteur d'eau située au-dessus de cet orifice,

$$z_A = \frac{v_B^2}{2g} + z_B \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh} \quad \text{avec} \quad h = z_A - z_B.$$

3.2.2.2 Tube de Pitot (Hydraulicien français, 1695–1771)

Cet appareil constitué de deux tubes concentriques permet de mesurer la vitesse dans un écoulement. Comme le montre la figure 3.3, le tube extérieur est fermé sur le tube intérieur au niveau du point A et contient une série de trous sur sa partie horizontale. Cet appareil est disposé dans un fluide ayant un écoulement horizontal de vitesse v . Nous supposons que

1. les tubes sont assez fins pour considérer que les points A et B sont à la même altitude,
2. le tube intérieur est rempli de fluide de sorte que la vitesse en A est nulle,
3. les trous dans le tube extérieur entraînent que $v_B = v$.

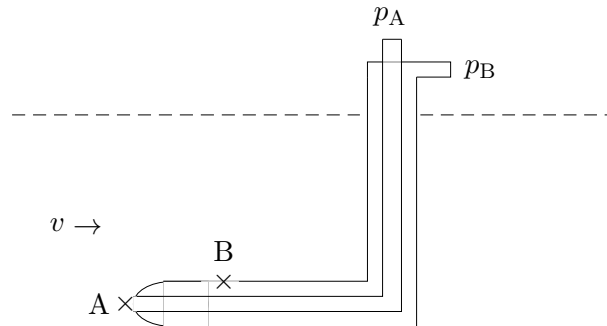


FIGURE 3.3 – Tube de Pitot dans un écoulement horizontal.

L'application du théorème de Bernoulli entre les points A et B donne directement la vitesse v du fluide qui varie comme la racine carrée de la différence de pression entre les deux tubes,

$$\frac{p_A}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{p_B}{\rho} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2}{\rho} \delta p} \quad \text{avec} \quad \delta p = p_A - p_B.$$

3.2.2.3 Tube de Venturi (Physicien italien, 1746–1822)

Cet appareil constitué d'un tube concentrique, d'un convergent, d'un divergent et d'un tube concentrique permet de mesurer le débit dans un écoulement. Les notations sont indiquées sur la figure 3.4. Nous supposons que les points A et B sont à la même altitude.

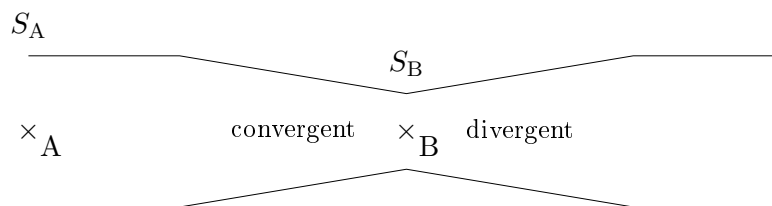


FIGURE 3.4 – Tube de Venturi dans un écoulement horizontal.

L'application du théorème de Bernoulli entre les points A et B est

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho}.$$

Le débit $Q = v_A S_A = v_B S_B$ est constant dans l'écoulement (voir §3.3.1) et s'exprime en fonction des sections de la conduite en A et B ainsi que de la différence de pression entre ces deux sections :

$$\frac{Q^2}{2S_A^2} + \frac{p_A}{\rho} = \frac{Q^2}{2S_B^2} + \frac{p_B}{\rho} \quad \Rightarrow \quad Q = S_A S_B \sqrt{\frac{2\delta p}{\rho(S_A^2 - S_B^2)}} \quad \text{avec} \quad \delta p = p_A - p_B.$$

3.2.2.4 Temps de vidange d'un réservoir

Nous souhaitons estimer le temps de vidange d'un réservoir de section constante. Nous adoptons les notations suivantes indiquées sur la figure 3.5 : S et s sont les sections du réservoir et de l'orifice, v et V désignent les vitesses au niveau de la surface libre et de l'orifice, h^0 représente la hauteur d'eau initiale, t_v est le temps de vidange.

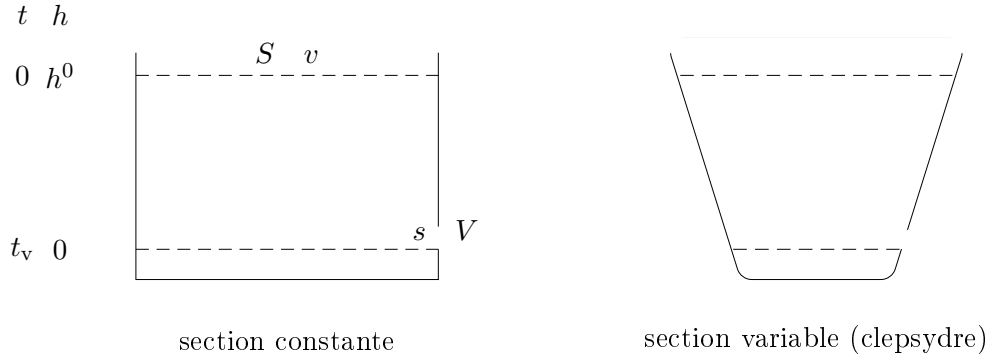


FIGURE 3.5 – Vidange d'un réservoir.

Le théorème de Bernoulli, la conservation du débit ainsi que l'expression de la vitesse v au niveau de la surface libre du réservoir (le signe négatif assure la positivité de v) permettent d'obtenir l'équation différentielle suivante

$$\left. \begin{array}{l} \frac{v^2}{2g} + h = \frac{V^2}{2g} \\ vS = Vs \\ v = -\frac{dh}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\left(\frac{S}{s} \right)^2 - 1 \right] \left(-\frac{dh}{dt} \right)^2 = 2gh.$$

En considérant que $s \ll S$, une séparation des variables h et t permet d'obtenir un temps de vidange théorique du réservoir

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} = \sqrt{2g} \frac{s}{S} dt \Rightarrow -[2\sqrt{h}]_{h^0}^0 = \sqrt{2g} \frac{s}{S} [t]_0^{t_v} \Rightarrow t_v = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h^0}{g}}.$$

Il est rassurant de constater que ce temps augmente si la section du réservoir et la hauteur d'eau initiale augmentent et qu'il diminue si la section de l'orifice augmente. La section du jet d'eau étant rarement égale à celle de l'orifice (comme c'est le cas pour l'eau s'écoulant d'un robinet), un coefficient correctif peut-être appliquée au débit de l'orifice ce qui entraîne une modification de ce temps de vidange théorique. Inventée dans l'Egypte antique², la *clepsydre* est une horloge à eau permettant de mesurer de courtes durées. La forme spécifique des clepsydres assure un écoulement régulier de l'eau au fil du temps. D'après ce qui précède, c'est une section variable du type $\alpha\sqrt{h}$ (α étant une constante positive) qui permet d'obtenir une relation linéaire entre la hauteur d'eau courante dans le récipient h_c et le temps écoulé t_c :

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{dh}{\sqrt{h}} = \sqrt{2g} \frac{s}{S(h)} dt \\ S(h) = \alpha\sqrt{h} \end{array} \right\} \Rightarrow -[h]_{h_c}^0 = \sqrt{2g} \frac{s}{\alpha} [t]_0^{t_c} \Rightarrow t_c = \beta h_c \text{ avec } \beta = \frac{\alpha}{s\sqrt{2g}}.$$

2. La plus ancienne clepsydre retrouvée date du règne d'Aménophis vers -1400.

3.3 Théorème d'Euler

Une limitation du théorème de Bernoulli est qu'il ne permet pas d'exprimer les actions mécaniques entre un fluide et un solide. Le théorème d'Euler permet de déterminer les actions globales s'exerçant sur un solide lorsque le fluide est incompressible et l'écoulement permanent.

3.3.1 Enoncé

Le théorème d'Euler traduit la **conservation de la quantité de mouvement** :

Théorème d'Euler. Dans un écoulement permanent de fluide incompressible, la variation de quantité de mouvement dans un tube de courant entre deux sections S_1 et S_2 est

$$F_{\text{tot}} = \rho Q(v_2 - v_1), \quad (3.7)$$

où F_{tot} désigne l'ensemble des forces extérieures, Q est le débit volumique, v_1 est la vitesse moyenne en S_1 et v_2 est la vitesse moyenne en S_2 .

Démonstration. Les tubes de courant sont inchangés au cours du temps en écoulement permanent. Soient 4 surfaces S_1, S'_1, S_2 et S'_2 représentées sur la figure 3.6. Les particules fluides traversent la surface S_1 (resp. S_2) à l'instant t et la surface S'_1 (resp. S'_2) à l'instant $t + \delta t$.

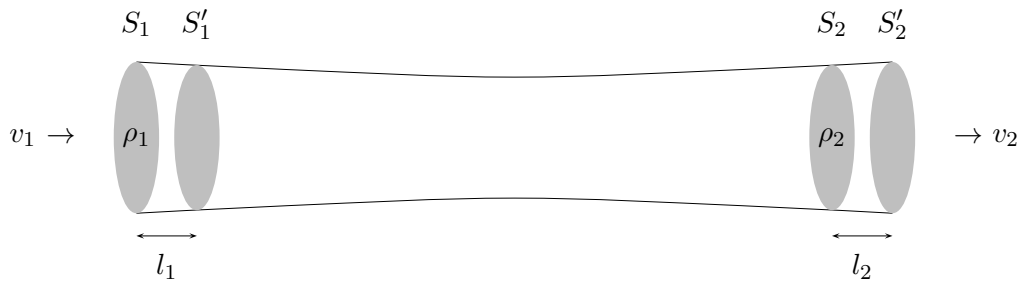


FIGURE 3.6 – Tube de courant dans un écoulement permanent.

Soit $m(t)$ (resp. $m(t + \delta t)$) la masse contenue entre les surfaces S_1 et S_2 (resp. S'_1 et S'_2). La **conservation de la masse** s'écrit

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad m(t + \delta t) - m(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta m_2 - \delta m_1 = 0, \quad (3.8)$$

où δm_i est la masse contenue entre les surfaces S_i et $S'_i \simeq S_i$,

$$\delta m_i = \rho_i S_i l_i = \rho_i S_i v_i \delta t. \quad (3.9)$$

Les égalités (3.8) et (3.9) aboutissent à la conservation du **débit massique** Q_m [$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$],

$$Q_m \stackrel{\text{def}}{=} \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \quad (3.10)$$

Pour un fluide incompressible, le **débit volumique** Q [$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$] est également conservé,

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad \text{et} \quad Q_m = \rho Q. \quad (3.11)$$

Le **principe fondamental de la dynamique** est

$$F_{\text{tot}} = \frac{dmv}{dt} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{tot}} = \frac{(\delta m_2 v_2 - \delta m_1 v_1)}{\delta t} \stackrel{(3.9)}{=} \rho_2 S_2 v_2^2 - \rho_1 S_1 v_1^2 \stackrel{(3.10)}{=} Q_m (v_2 - v_1).$$

□

L'utilisation du théorème d'Euler nécessite de

1. se placer dans un repère tel que l'écoulement soit permanent,
2. définir le système étudié (portion de fluide),
3. lister les forces qui s'appliquent au système,
4. résoudre en projetant sur les différents axes.

3.3.2 Applications

Le théorème d'Euler permet par exemple de calculer la résultante des forces de pression s'exerçant au niveau d'un coude ou d'un rétrécissement dans une canalisation. Il permet également de déterminer cette résultante sur une plaque, un auget d'une roue hydraulique et un tourniquet hydraulique. L'exemple que nous détaillons est un coude dans une canalisation.

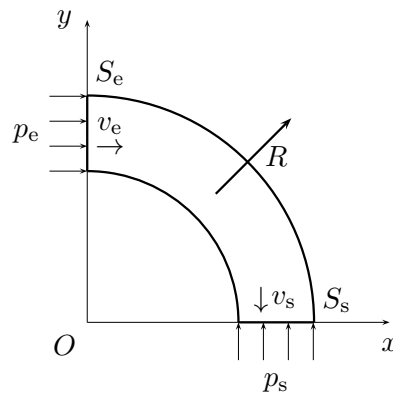


FIGURE 3.7 – Coude dans une canalisation (plan horizontal).

Le repère (O, x, y) est tel que l'écoulement dans le coude est permanent. Les forces s'appliquant sur la portion de fluide contenue dans le coude sont la force F qui s'exerce sur le coude, les forces F_e et F_s qui s'exercent respectivement sur les sections S_e et S_s , le poids P . Le théorème d'Euler s'écrit

$$F + F_e + F_s + P = -\rho Q(v_s e_y + v_e e_x).$$

La force R qu'exerce le fluide sur le coude est l'opposée de la force F . Les trois composantes de l'équation précédente sont

$$-\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_e S_e \\ p_s S_s \\ -mg \end{pmatrix} = -\rho Q \begin{pmatrix} v_e \\ v_s \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R_x = p_e S_e + \rho Q v_e \\ R_y = p_s S_s + \rho Q v_s \\ R_z = -mg \end{cases}$$

Il y a 6 inconnues pour connaître les trois composantes de la force R . Les sections S_e et S_s sont des données géométriques alors que le débit Q et la pression p_e peuvent être mesurées. Le théorème de Bernoulli et la conservation du débit fournissent deux équations supplémentaires :

$$p_e + \rho \frac{v_e^2}{2} = p_s + \rho \frac{v_s^2}{2} \quad \text{et} \quad S_e v_e = S_s v_s.$$

Effectuons une application numérique en supposant que le diamètre moyen du coude est de 20cm et que son rayon est de 5cm (les surfaces S_e et S_s sont alors égales à $7.85 \cdot 10^{-3}\text{m}^2$). En prenant $p_e = 2\text{bars}$ et $Q = 30\text{l} \cdot \text{s}^{-1}$, nous obtenons que $R_x = R_y = 1684\text{N}$ et $R_z = 24\text{N}$ ce qui montre que le poids de l'eau est faible devant les actions piézométriques et cinétiques du fluide.

3.4 Ecoulements irrotationnels

3.4.1 Théorème de Lagrange

Le théorème de Lagrange (mathématicien français, 1736 – 1813) motive l'étude des écoulements irrotationnels et s'énonce ainsi

Théorème de Lagrange. *Dans un écoulement de fluide parfait incompressible soumis à des forces de masse dérivant d'un potentiel, une particule fluide dont le taux de rotation est nul à un instant donné garde ensuite un taux de rotation nul.*

Démonstration. Lorsque les forces extérieures massiques dérivent d'un potentiel U , l'équation d'Euler s'écrit

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \text{rot}(v) \wedge v + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla U.$$

Prenons le rotationnel de cette équation et utilisons la propriété de composition des opérateurs rotationnel et gradient,

$$\text{rot}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \text{rot}(\text{rot}(v) \wedge v) = 0.$$

En introduisant le vecteur tourbillon $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \text{rot}(v)$ et en supposant que le champ de vitesse v est suffisamment régulier, nous avons

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{rot}(\Omega \wedge v) = 0.$$

En utilisant que $\text{rot}(\Omega \wedge v) = v \cdot \nabla \Omega - \Omega \cdot \nabla v$, nous obtenons l'équation du tourbillon parfois appelée équation d'Helmholtz³ :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + v \cdot \nabla \Omega = \Omega \cdot \nabla v.$$

D'après cette équation, une particule ayant un taux de rotation nul (*i.e.* $\Omega = 0$) à un instant donné garde son taux de rotation nulle (car $d_t \Omega = 0$). \square

Autrement dit, si à un instant donné une particule ne tourne pas sur elle-même, elle ne sera jamais mise en rotation dans un écoulement de fluide parfait. Physiquement, cela vient du fait que l'on néglige les forces tangentielles de frottements qui sont les seules capables de créer un couple permettant la mise en rotation.

3.4.2 Potentiel des vitesses

Théorème 14. *Dans un écoulement est irrotationnel, la vitesse dérive d'un potentiel des vitesses noté φ ,*

$$\text{rot}(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varphi, \quad v = \nabla \varphi$$

Démonstration. Ce résultat provient directement du théorème de Helmholtz–Hodge qui indique que tout champ vectoriel v de classe $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ peut se décomposer comme la somme d'un champ solénoïdal et irrotationnel, $v = \text{rot}(A) + \nabla \varphi$. \square

3. A ne pas confondre avec l'équation d'Helmholtz rencontrée dans l'acoustique en domaine fréquentiel, $\Delta p + k^2 p = 0$, où p est la pression et k est le nombre d'onde.

Propriété 5. *Le potentiel des vitesses est harmonique si l'écoulement est solénoïdal.*

Démonstration. $\operatorname{div}(v) = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\nabla\varphi) = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0$ □

Les courbes où le potentiel des vitesses est constant s'appellent des *équipotentielles*.

3.4.3 Paradoxe de d'Alembert

Le paradoxe de d'Alembert (mathématicien et philosophe français, 1717 – 1783) traduit une contradiction concernant la force pressante s'exerçant sur un obstacle dans un écoulement de fluide parfait. Cela provient de l'absence de viscosité dans le modèle de fluide parfait. Nous revenons sur cette contradiction lors de l'étude d'un cylindre en rotation au § 3.5.4 et précisons que la force de traînée s'oppose au mouvement d'un corps dans un fluide alors que la force de portance s'exerce perpendiculairement à la direction du mouvement.

Paradoxe de d'Alembert. *L'effort de traînée exercé sur un obstacle imperméable placé dans un courant uniforme à l'infini sans force volumique est nul si le fluide est parfait, incompressible et si le mouvement est permanent et irrotationnel.*

L'effort de portance est également nul si la circulation du vecteur vitesse sur le contour de l'obstacle est nul.

Démonstration. Nous considérons le cas sans circulation. Soit un obstacle \mathcal{C} de frontière $\partial\mathcal{C}$ et de normale extérieure unitaire n , placé dans un écoulement de fluide de vitesse uniforme à l'infini v_∞ . Nous considérons une sphère \mathcal{S} , de frontière $\partial\mathcal{S}$ et de rayon R centrée sur \mathcal{C} . L'obstacle est supposé imperméable, c'est-à-dire que $v \cdot n = 0$ sur $\partial\mathcal{C}$. Compte-tenu de l'hypothèse de stationnarité du mouvement et de l'absence de force volumique, l'équation d'Euler s'écrit

$$\rho v \cdot \nabla v + \nabla p = 0.$$

L'intégration sur le domaine entourant l'obstacle ($\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}$) donne

$$\int_{\mathcal{S}} \rho v \cdot \nabla v dV - \int_{\mathcal{C}} \rho v \cdot \nabla v dV + \int_{\mathcal{S}} \nabla p dV - \int_{\mathcal{C}} \nabla p dV = 0.$$

En utilisant l'égalité $v \cdot \nabla v = \operatorname{div}(v \otimes v) + v \operatorname{div}(v)$ dans le cas d'un fluide incompressible et le théorème de Gauss pour reformuler les intégrales sur les frontières de \mathcal{S} et \mathcal{C} , nous obtenons

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \rho v \otimes v n dS - \int_{\partial\mathcal{C}} \rho v \otimes v n dS + \int_{\partial\mathcal{S}} p n dS - \int_{\partial\mathcal{C}} p n dS = 0.$$

L'égalité $v \otimes v n = v \cdot n v$ et la définition de la force pressante F sur \mathcal{C} donnent

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \rho v \cdot n v dS - \int_{\partial\mathcal{C}} \rho v \cdot n v dS + \int_{\partial\mathcal{S}} p n dS + F = 0.$$

Lorsque le rayon de la sphère est suffisamment grand, les deux intégrales sur $\partial\mathcal{S}$ sont nulles étant donné les expressions des champs de vitesse et de pression⁴ : $v = v_\infty + O(\|x\|^{-3})$ et $p = p_\infty + O(\|x\|^{-3})$. La condition d'imperméabilité annule l'intégrale sur $\partial\mathcal{C}$ et termine la démonstration lorsque la circulation est nulle :

$$F = 0.$$

□

4. ces expressions reposent sur la circulation nulle autour de l'obstacle et l'irrotationnalité du mouvement en utilisant le caractère potentiel du champ de vitesse.

3.5 Ecoulements irrotationnels plans

3.5.1 Fonction de courant

Nous supposons dans cette dernière section que l'écoulement est bidimensionnel plan (vitesse indépendante de z et vitesse verticale v_z nulle). Dans ce cas, un écoulement solénoïdal entraîne l'existence d'une *fonction de courant* ψ qui présente des propriétés intéressantes.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \\ &\Leftrightarrow v_x dy - v_y dx \text{ est une différentielle totale d'après le critère de Schwartz} \\ &\Leftrightarrow \exists \psi, d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = v_x dy - v_y dx \end{aligned}$$

Par identification, nous avons

$$\boxed{v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.}$$

Propriété 6. *La fonction de courant est constante au niveau des lignes de courant.*

Démonstration. Les lignes de courant d'un mouvement plan s'obtiennent en résolvant le système

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \Leftrightarrow \quad v_x dy - v_y dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi = \text{cste.}$$

□

Propriété 7. *La fonction de courant est harmonique.*

Démonstration. Le potentiel des vitesses est supposé suffisamment régulier,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} &\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} &\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta \psi = 0.$$

□

Propriété 8. *Le débit entre deux points M_1 et M_2 est $\psi(M_2) - \psi(M_1)$.*

Démonstration. Le débit Q entre les deux lignes de courant est

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \int_{M_1}^{M_2} v \cdot n \, ds,$$

où v est la vitesse de l'écoulement, n la normale au niveau d'un point M situé entre les deux lignes de courant (voir la figure 3.8) et s l'abscisse curviligne du point M . $M_1 M_2 \stackrel{\text{def}}{=} x(s)e_x + y(s)e_y$ et la tangente t à $M_1 M_2$ en M est donnée par $t = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$. En utilisant que la normale n à $M_1 M_2$ en M est donnée par $n = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right)$, nous obtenons que le débit entre les lignes de courant \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 dépend uniquement de la valeur de la fonction de courant sur ces deux lignes de courant :

$$Q = \int_{M_1}^{M_2} v_x dy - v_y dx = \int_{M_1}^{M_2} d\psi = \psi(M_2) - \psi(M_1).$$

□

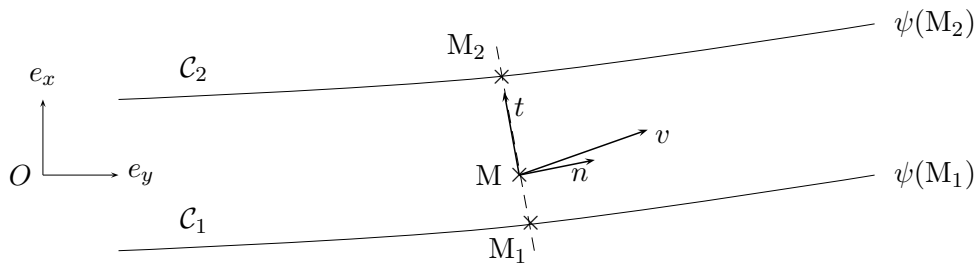


FIGURE 3.8 – Détermination du débit dans un écoulement potentiel.

Propriété 9. Les équipotentiels et les lignes de courant sont orthogonales.

Démonstration. La normale à la courbe $\varphi = \text{cste}$ (resp. $\psi = \text{cste}$) est colinéaire au gradient $\nabla\varphi$ (resp. $\nabla\psi$) et le produit scalaire de $\nabla\varphi$ et $\nabla\psi$ est nul : $\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = -v_x v_y + v_y v_x = 0$. \square

3.5.2 Potentiel et vitesse complexes

Un point du plan peut être représenté dans le plan complexe par la variable complexe z ($z = x + iy$ en coordonnées cartésiennes et $z = re^{i\theta}$ en coordonnées polaires) et il est possible de définir le *potentiel complexe* $f(z)$ par

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi + i\psi.$$

Cette fonction complexe est dérivable car elle vérifie les conditions de Cauchy,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

La dérivée du potentiel complexe en coordonnées cartésiennes est

$$\frac{df(z)}{dz} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Cette dérivée, notée $w(z)$, s'appelle la *vitesse complexe* de l'écoulement et correspond au complexe conjugué associé au vecteur vitesse de l'écoulement :

$$\frac{df(z)}{dz} = w(z) = v_x - iv_y. \quad (3.12)$$

Dans le cas des coordonnées polaires, la vitesse complexe est

$$w(z) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + i\frac{\partial\psi}{\partial r} \right) = e^{-i\theta} (v_r - iv_\theta). \quad (3.13)$$

En résumé, la connaissance du potentiel complexe $f(z)$ dans un écoulement permet d'obtenir :

- les lignes de courant ψ en déterminant $\text{Im}(f(z)) = \text{cste}$,
- les équipotentiels φ en déterminant $\text{Re}(f(z)) = \text{cste}$,
- le champ de vitesse v à partir de $w(z) = f'(z)$,
- le champ de pression $p(z)$ qui vaut $K - \frac{1}{2}\rho|w(z)|^2$ (car la pesanteur est négligée).

Exemples de potentiels complexes :

- Écoulement uniforme de vitesse u_0 faisant un angle α par rapport à Ox : $f(z) = u_0 e^{-i\alpha} z$,
- Source ponctuelle de débit Q située à l'origine : $f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z)$,
- Tourbillon ponctuel de circulation Γ située à l'origine : $f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z)$.

3.5.3 Formules de Blasius

Les formules de Blasius (physicien allemand, 1883–1970) permettent de connaître la résultante des efforts⁵ exercés par le fluide sur un obstacle matérialisé par une ligne de courant \mathcal{C} fermée et soumis à un écoulement défini par un potentiel complexe. La première formule concerne la résultante des forces de pression (de composante F_x et F_y) :

$$\boxed{F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz.} \quad (3.14)$$

Démonstration. Compte tenu de l'expression de la normale n à \mathcal{C} et du théorème de Bernoulli, l'expression de la force pressante $F \stackrel{\text{def}}{=} - \oint_{\mathcal{C}} p n ds$ dans le plan complexe est

$$F = - \oint_{\mathcal{C}} \left(\text{cste} - \rho \frac{v^2}{2} \right) \left(\frac{dy}{ds} - i \frac{dx}{ds} \right) ds \stackrel{(3.12)}{=} \frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{df}{dz} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} (dy - idx) = -i \frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{df}{dz} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} dz.$$

Le conjugué de F est

$$\bar{F} = i \frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{df}{dz} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} d\bar{z} = i \frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{df}{dz} d\bar{f}.$$

Comme $f = \varphi + i\psi$, alors $\bar{f} = \varphi - i\psi = \varphi + i\psi - 2i\psi = f - 2i\psi$ et

$$\bar{F} = i \frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{df}{dz} df + \rho \oint_{\mathcal{C}} \frac{df}{dz} d\psi.$$

Le contour \mathcal{C} étant un obstacle, il est une ligne de courant et $d\psi = 0$ le long de \mathcal{C} . □

La seconde formule concerne la résultante des moments par rapport à un point d'affixe z_0 :

$$\boxed{\mathcal{M} = -\frac{\rho}{2} \text{Re} \left[\oint_{\mathcal{C}} (z - z_0) \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz \right].} \quad (3.15)$$

Démonstration. Le moment \mathcal{M} en O d'affixe z_0 exercé par l'écoulement sur l'obstacle \mathcal{C} est

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} - \oint_{\mathcal{C}} \text{OM} \wedge p n ds = \oint_{\mathcal{C}} p((x - x_0)dx + (y - y_0)dy),$$

en utilisant que $-\text{OM} \wedge n \stackrel{\text{def}}{=} \left((x - x_0) \frac{dx}{ds} + (y - y_0) \frac{dy}{ds} \right) = \text{Re} \left((z - z_0) \frac{d\bar{z}}{ds} \right)$. En exprimant la pression en fonction de la vitesse comme dans la démonstration précédente, on obtient

$$\mathcal{M} = -\frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{df}{dz} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \text{Re}((z - z_0) d\bar{z}) = -\frac{\rho}{2} \text{Re} \left[\oint_{\mathcal{C}} (z - z_0) \frac{df}{dz} d\bar{f} \right].$$

L'égalité $\bar{f} = f - 2i\psi$ termine la démonstration. □

5. Il s'agit d'efforts par unité de longueur perpendiculaire au plan de l'écoulement

3.5.4 Etude d'un cylindre en rotation

L'écoulement dans un fluide ayant une vitesse horizontale u_0 autour d'un cylindre de rayon R avec circulation Γ est décrit par le potentiel complexe suivant

$$f(z) = u_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z) \quad \text{avec} \quad \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \int_C v \cdot t \, dl.$$

3.5.4.1 Potentiel et fonction de courant

En remplaçant z par $re^{i\theta}$, le potentiel complexe s'écrit

$$\begin{aligned} f(z) &= u_0 \left(re^{i\theta} + \frac{R^2}{r} e^{-i\theta} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} (\ln(r) + i\theta), \\ &= u_0 r \cos(\theta) \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma\theta}{2\pi} + iu_0 r \sin(\theta) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(r). \end{aligned}$$

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont

$$\varphi = u_0 r \cos(\theta) \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma\theta}{2\pi} \quad \text{et} \quad \psi = u_0 r \sin(\theta) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r).$$

3.5.4.2 Vitesse et points d'arrêt

Les expressions de φ et ψ trouvées précédemment donnent

$$\begin{aligned} w(z) &\stackrel{(3.13)}{=} e^{-i\theta} \left(u_0 \cos(\theta) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + iu_0 \sin(\theta) \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi r} \right) \\ &= e^{-i\theta} \left(u_0 e^{i\theta} - u_0 e^{-i\theta} \frac{R^2}{r^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi r} \right) = u_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \end{aligned}$$

La forme des lignes de courant dépend de la position des *points d'arrêt* qui sont les points où la vitesse s'annule. Leurs affixes z vérifient l'équation suivante

$$z^2 - \frac{i\Gamma z}{2\pi u_0} - R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{\pm} = \frac{i\Gamma}{4\pi u_0} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 u_0^2}} = iR \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \pm R \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)^2},$$

où $\Gamma_0 \stackrel{\text{def}}{=} 4\pi R u_0$. On distingue les quatre cas suivants

- $\Gamma = 0 \Rightarrow z_{\pm} = \pm R$,
- $\Gamma < \Gamma_0 \Rightarrow \text{Im}(z_{\pm}) = R \frac{\Gamma}{\Gamma_0}$ et $\text{Re}(z_{\pm}) = \pm R \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)^2}$,
- $\Gamma = \Gamma_0 \Rightarrow z_{\pm} = iR$,
- $\Gamma > \Gamma_0 \Rightarrow \text{Re}(z_{\pm}) = 0$ et $\text{Im}(z_{\pm}) = R \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \pm R \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)^2 - 1}$,

qui permettent de déduire les positions des points d'arrêt :

- $\Gamma = 0 \Rightarrow$ les deux points d'arrêt sont aux intersections du cylindre avec l'axe horizontal,
- $\Gamma < \Gamma_0 \Rightarrow$ les deux points d'arrêt sont sur le cylindre symétriquement par rapport à Oy ,
- $\Gamma = \Gamma_0 \Rightarrow$ le seul point d'arrêt est à l'intersection du cylindre avec l'axe Oy ,
- $\Gamma > \Gamma_0 \Rightarrow$ un point d'arrêt est à l'intérieur du cylindre et l'autre est à l'extérieur.

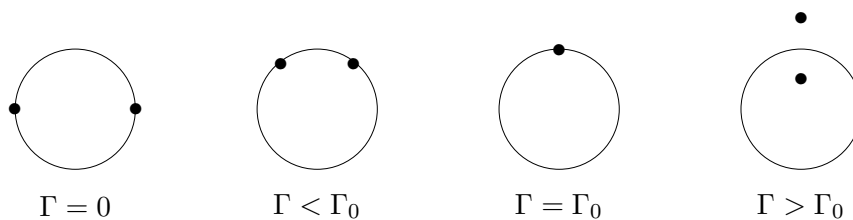
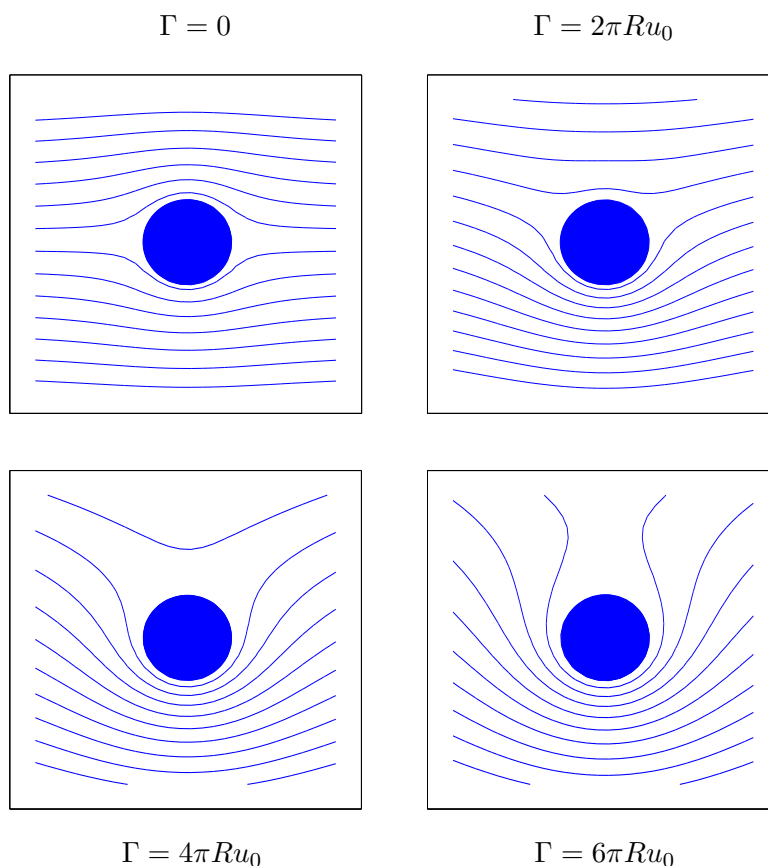


FIGURE 3.9 – Position des points d'arrêt suivant la valeur de la circulation.

3.5.4.3 Allure des lignes de courant et des équipotentielles

La figure 3.10 représente les lignes de courant autour du cylindre quand la circulation $\Gamma = 2k\pi R u_0$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $R = 1m$ et $u_0 = 2m \cdot s^{-1}$. Le domaine représenté est $[-3.5, 3.5] \times [-3.5, 3.5]$. La symétrie par rapport à l'axe vertical passant par le centre du cylindre est visible quand la circulation est nulle, l'axe horizontal est aussi un axe de symétrie. Quand la circulation est non nulle, les lignes de courant plus resserrées dans le demi-plan inférieur indiquent que la vitesse du fluide est plus importante dans ce demi-plan. Il en résulte une surpression dans le demi-plan supérieur de sorte que le cylindre se trouve soumis à une force orientée vers le bas. Il s'agit de l'*effet Magnus* que l'on retrouve dans une balle liftée : une force perpendiculaire au mouvement initial d'une balle en rotation sur elle-même incurve sa trajectoire. C'est le même phénomène pour une aile d'avion : les lignes de courant sont plus resserrées au-dessus et la surpression en dessous de l'aile génère la force de portance. L'explication est similaire lorsqu'un vent fort souffle sur une maison : les lignes de courant se resserrent au-dessus du toit et produisent une dépression à l'intérieur créant une force verticale pouvant arracher le toit.

FIGURE 3.10 – Lignes de courant autour du cylindre en fonction de la circulation Γ .

Comme pour les lignes de courant, les équipotentielles représentées sur la figure 3.11 présentent une symétrie par rapport à l'axe vertical passant par le centre du cylindre puisque ces deux familles de courbes sont orthogonales.

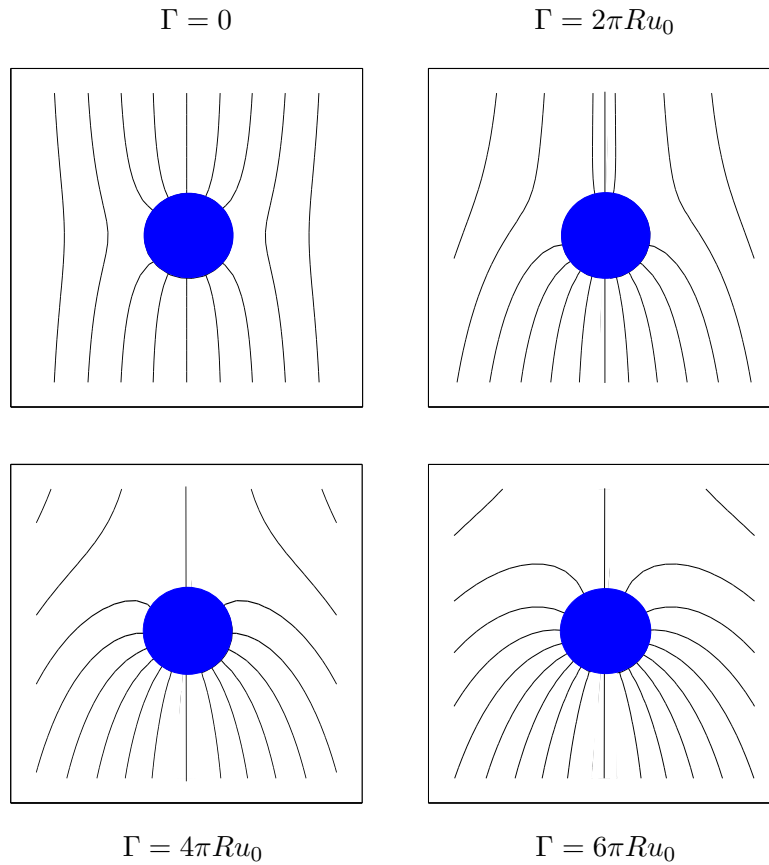


FIGURE 3.11 – Equipotentiels autour du cylindre en fonction de la circulation Γ .

3.5.4.4 Force de pression

La force pressante exercée par le fluide sur le cylindre est

$$F_p \stackrel{\text{def}}{=} - \int_0^{2\pi} pnRd\theta.$$

Le théorème de Bernoulli entre un point courant et un point d'arrêt A permet de reformuler cette intégrale

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = p_A \quad \Rightarrow \quad F_p = -p_A R \int_0^{2\pi} n d\theta + \frac{\rho R}{2} \int_0^{2\pi} v^2 n d\theta.$$

Cela revient à écrire la force pressante en fonction de la force de pression totale F_t et de la force de pression dynamique F_d ,

$$F_p = F_t - F_d, \quad \text{avec} \quad F_t \stackrel{\text{def}}{=} -p_A R \int_0^{2\pi} n d\theta \quad \text{et} \quad F_d \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\rho R}{2} \int_0^{2\pi} v^2 n d\theta.$$

F_t est nulle et la vitesse complexe permet d'obtenir le carré de la vitesse pour calculer F_d ,

$$w(z) = u_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2u_0^2 \left(1 + 2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)^2 - \cos(2\theta) - 4 \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \sin(\theta) \right).$$

En considérant que la normale extérieure s'écrit $n = (\cos(\theta), \sin(\theta))^T$, on obtient les deux composantes de la force pressante,

$$F_{p,x} = \rho R u_0^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)^2 - \cos(2\theta) - 4 \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \sin(\theta) \right) \cos(\theta) d\theta = 0$$

$$F_{p,y} = \rho R u_0^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)^2 - \cos(2\theta) - 4 \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \sin(\theta) \right) \sin(\theta) d\theta = -\rho u_0 \Gamma.$$

La composante $F_{p,x}$ est la force de *trainée* et la composante $F_{p,y}$ est la force de *portance* s'exerçant sur le cylindre. La force de trainée s'oppose au mouvement du cylindre et la force de portance s'exerce perpendiculairement à la direction du mouvement.

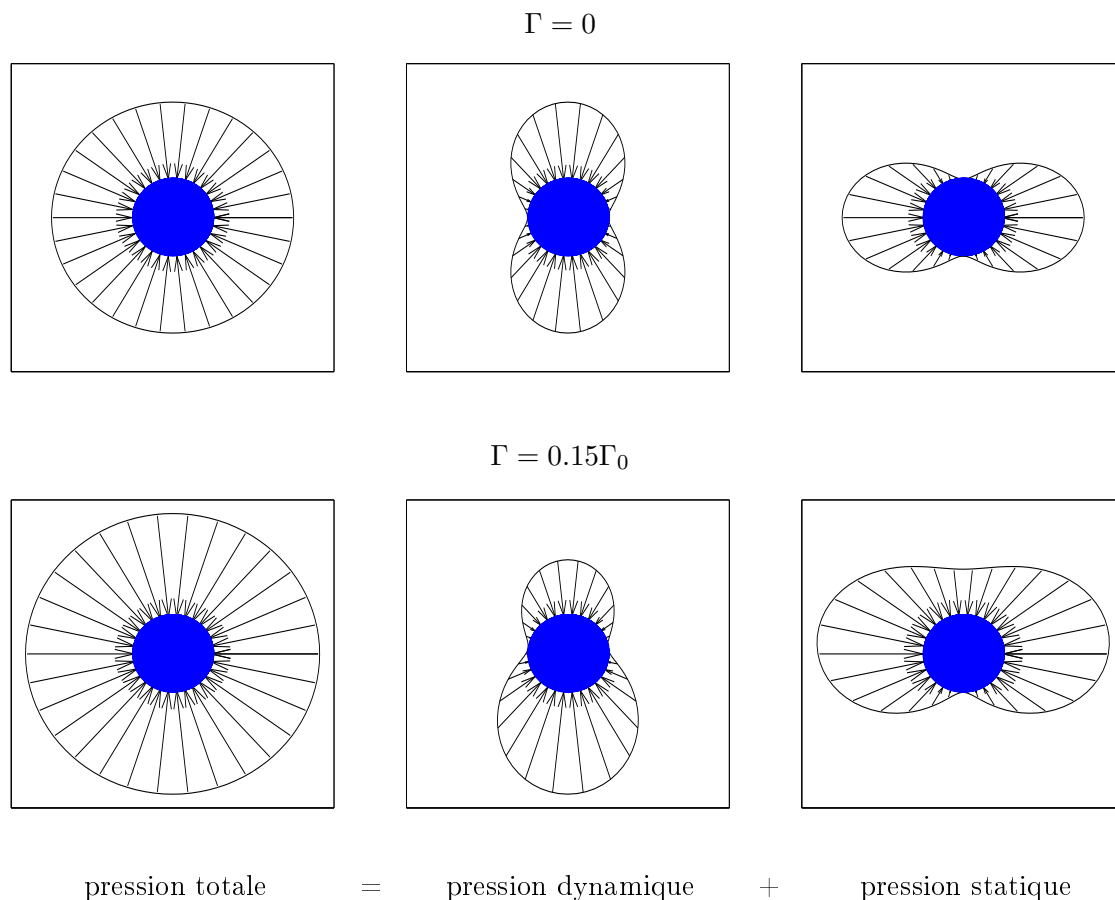


FIGURE 3.12 – Décomposition de la force de pression locale autour du cylindre.

La figure 3.12 représente la décomposition de la force de pression locale sans circulation ($\Gamma = 0$) et avec circulation ($\Gamma = 0.15\Gamma_0$). Comme attendu, la pression totale est constante (d'après le théorème de Bernoulli) et la pression dynamique est nulle aux deux points d'arrêt. Sans circulation, la nullité de la force pressante résulte de la symétrie des pressions selon les deux axes. L'absence de portance s'explique par la circulation nulle alors que l'absence de trainée signifie que l'obstacle ne bouge pas sous l'effet du fluide, ce qui est pour le moins surprenant ! Cette contradiction est le paradoxe de d'Alembert (énoncé au § 3.4.3) et provient des effets visqueux absents du modèle de fluide parfait mais présents dans la réalité. Avec circulation, la pression statique indique clairement la présence de la force de portance $-\rho u_0 \Gamma$ dirigée vers le bas.

3.5.4.5 Transformations conformes

A partir de l'écoulement autour d'un cylindre, les transformations conformes permettent l'étude sur des corps quelconques. La transformation de Joukowski (mathématicien russe, 1847 – 1921) qui permet l'étude autour de profils d'ailes d'avions est un célèbre exemple d'application en aérodynamique.

Chapitre 4

Fluides réels

L'hypothèse des fluides parfaits s'avère parfois trop restrictive comme le montrent la condition de glissement et le paradoxe de d'Alembert. Lorsque la viscosité d'un fluide n'est pas négligeable, il existe des forces de frottement qui influencent l'écoulement et provoquent une dissipation d'énergie. Nous étudions dans ce chapitre les fluides newtoniens pour lesquels les composantes du tenseur des contraintes visqueuses dépendent linéairement des valeurs instantanées des déformations.

Ce chapitre contient quatre parties. La première partie est une présentation des fluides newtoniens ; l'équation de Navier–Stokes est présentée puis simplifiée en l'équation de Stokes qui est résolue analytiquement dans des cas simples. La seconde partie concerne les pertes de charge avec le théorème de Bernoulli généralisé qui permet notamment le dimensionnement des circuits hydrauliques. Les troisième et quatrième parties présentent de façon succincte les notions de couche limite et de similitude.

4.1 Fluides newtoniens

4.1.1 Expérience de Newton

Newton (physicien anglais, 1642–1727) étudia en 1683 des écoulements de fluides visqueux entre deux plaques planes horizontales de même surface S et séparées d'une distance h . La plaque inférieure est supposée fixe alors que la plaque supérieure se déplace à une vitesse constante et uniforme v_0 comme représentée sur la figure 4.1.

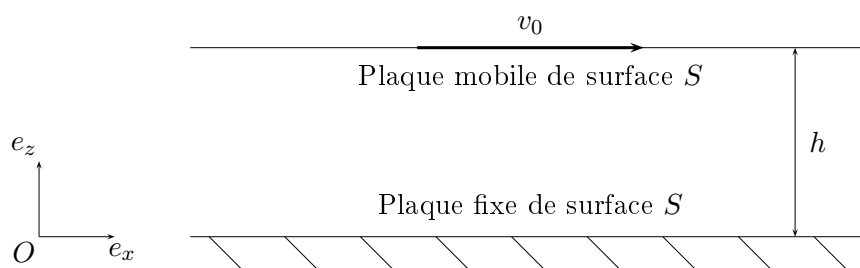


FIGURE 4.1 – Expérience de Newton.

Les résultats de cette expérience ont montré que la force F nécessaire à la mobilité de la plaque supérieure est proportionnelle à la surface S et à la vitesse v_0 de cette plaque. Cette force est aussi inversement proportionnelle à la distance h entre les deux plaques de sorte que

$$F = \mu S \frac{v_0}{h}. \quad (4.1)$$

Le coefficient de proportionnalité μ [$Pa \cdot s$] s'appelle la *viscosité dynamique*. A la force F précédente correspond une contrainte visqueuse de cisaillement τ_{xz} ,

$$\tau_{xz} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F}{S} \stackrel{(4.1)}{=} \mu \frac{v_0}{h}. \quad (4.2)$$

En considérant cette contrainte proportionnelle au gradient vertical de la vitesse horizontale, nous avons

$$\tau_{xz} \stackrel{\text{hyp}}{=} \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \stackrel{(4.2)}{=} \mu \frac{v_0}{h} \Rightarrow v_x = \frac{v_0}{h} z,$$

ce profil de vitesse est linéaire entre la plaque inférieure ($v_x = 0$) et la plaque supérieure ($v_x = v_0$).

La viscosité est une propriété thermodynamique du fluide qui dépend de la température et de la pression. Le tableau 4.1 indique la viscosité dynamique et la densité d [–] de quelques fluides dans des conditions normales de températures et de pression ($20^\circ C$ et 1 atm) sauf pour le sang dont les conditions sont celles du corps humain¹. Comme l'indique la relation 4.1, nous retrouvons sur ces exemples intuitifs que lorsque la viscosité augmente, la capacité du fluide à s'écouler diminue. Pour un liquide (au contraire d'un gaz), la viscosité tend généralement à baisser quand la température s'accroît. Enfin, la viscosité et la masse volumique ne sont pas corrélées puisque l'huile est moins dense que l'eau mais significativement plus visqueuse. L'huile d'olive par exemple a une densité de 0.92 et une viscosité dynamique de 0.9 environ qui est 900 fois supérieure à celle de l'eau.

	air	eau	huile d'olive	sang	miel	bitume
μ	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$\simeq 0.9$	4 à 25	10	10^8
d	$1.2 \cdot 10^{-3}$	1	0.92	$\simeq 1.06$	1.4	1.03

TABLE 4.1 – Viscosité dynamique et densité de quelques fluides.

Le modèle linéaire du fluide newtonien appliqué à des fluides tels que l'eau et l'air conduit à des résultats bien vérifiés expérimentalement. Il existe d'autres lois de comportement dont quelques-unes sont indiquées sur le schéma 4.2. Les *rhéo-fluidifiants* (ou *pseudo-plastiques*) ont une viscosité qui diminue lorsque la contrainte augmente. A l'inverse, les *rhéo-épaississants* (ou *dilatants*) ont une viscosité qui croît lorsque la contrainte augmente. Les *fluides de Bingham* ont un comportement linéaire à partir d'un certain seuil. L'étude de ces fluides non newtoniens est l'objet de la *rhéologie* et sort du cadre de ce cours.

1. La température moyenne est de $37^\circ C$ et la pression artérielle varie entre une valeur minimale liée à la relaxation du ventricule gauche et une valeur maximale liée à la contraction de ce même ventricule. Ces pressions maximale et minimale s'appellent respectivement pressions systolique et diastolique. Elles s'expriment en *mm* de mercure et la tension artérielle est normale lorsque ces pressions sont inférieures à 140 et 90. Au-delà, on parle d'hypertension artérielle.

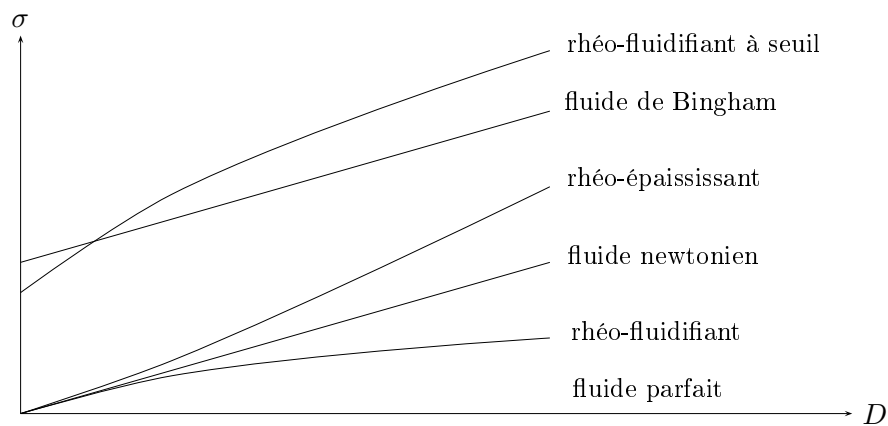


FIGURE 4.2 – Différents types de fluides.

4.1.2 Equation de Navier–Stokes

Théorème 15. *L'équation d'équilibre dans un fluide newtonien est*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v + \frac{1}{\rho} \nabla p = F + \nu \Delta v,$$

dans laquelle $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mu/\rho$ [$m^2 \cdot s^{-1}$] est la viscosité cinématique.

Démonstration. L'équation d'équilibre est

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho F + \text{div}(\sigma).$$

Dans le cas des fluides newtoniens, le tenseur des contraintes visqueuses τ s'écrit

$$\tau = 2\mu D + \eta \text{tr}(D)I,$$

où η désigne la viscosité de dilatation. Pour un fluide incompressible, la trace du tenseur D est nulle et l'expression du tenseur des contraintes σ est

$$\sigma = -pI + 2\mu D.$$

La divergence du tenseur des contraintes peut se reformuler,

$$\begin{aligned} \text{div}(-pI + 2\mu D) &= \text{div}(-pI) + \text{div}(2\mu D), \\ &= -\nabla p + \mu \text{div}(\nabla v + \nabla^\top v), \\ &= -\nabla p + \mu \Delta v + \mu \text{div}(\nabla^\top v), \\ &= -\nabla p + \mu \Delta v + \mu \nabla(\text{div}(v)). \end{aligned}$$

L'équation d'équilibre pour un fluide incompressible devient alors

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho F - \nabla p + \mu \Delta v.$$

En divisant cette équation par la masse volumique ρ et en explicitant la dérivée particulaire de la vitesse, nous obtenons l'équation souhaitée. \square

Comme pour l'équation d'Euler, l'équation de Navier–Stokes (NS) et l'équation de continuité sont résolues en imposant des conditions initiales et des conditions aux limites (cf. § 3.1). La *condition d'adhérence* s'ajoute à la condition d'imperméabilité au niveau d'une paroi imperméable dans un écoulement de fluide réel,

$$v \cdot t = 0,$$

où t désigne une tangente extérieure unitaire à la paroi. Pour un fluide réel, les vitesses normale et tangentielles étant nulles, la vitesse est nulle au niveau d'une paroi imperméable.

4.1.3 Equation de Stokes

Théorème 16. *L'équation d'équilibre dans un fluide newtonien en écoulement permanent et si le terme d'advection $v \cdot \nabla v$ est négligeable devant le terme de diffusion $\nu \Delta v$ est*

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = F + \nu \Delta v.$$

Cette équation étant linéaire, si v est solution alors $-v$ est aussi solution si l'on change le signe du terme de pression et des forces extérieures. Cette *réversibilité* a été observée lors d'une expérience menée par Taylor (physicien anglais, 1886–1975) en 1966. Un colorant est injecté dans de la glycérine entre deux cylindres concentriques. La mise en rotation du cylindre interne entraîne une diffusion du colorant (temps t_0 à t_2) puis la mise en rotation dans le sens inverse provoque la réapparition du colorant sous sa forme et concentration initiales (temps t_3 à t_4).

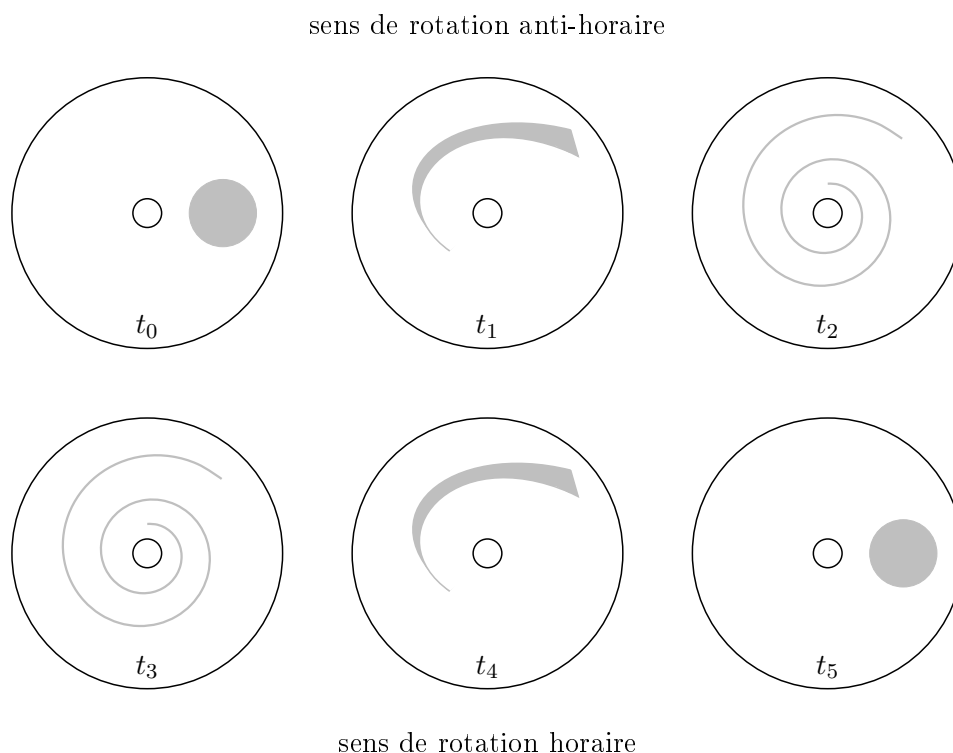


FIGURE 4.3 – Expérience de Taylor.

En notant V la vitesse caractéristique du fluide et L une dimension caractéristique, nous pouvons obtenir un ordre de grandeur des termes d'advection et de diffusion

$$\|v \cdot \nabla v\| \simeq \frac{V^2}{L} \quad \text{et} \quad \|\nu \Delta v\| \simeq \nu \frac{V}{L^2}.$$

L'advection étant négligeable devant la diffusion, nous avons

$$\frac{V^2}{L} \ll \nu \frac{V}{L^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{VL}{\nu} \ll 1$$

Nous introduisons le *nombre de Reynolds* (ingénieur et physicien irlandais, 1842–1912), noté R_e et sans dimension, défini par

$$R_e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{VL}{\nu}$$

L'équation de Stokes est ainsi valable à faible nombre de Reynolds ($R_e \ll 1$).

4.1.4 Écoulements entre deux plans horizontaux

Nous considérons l'écoulement d'un fluide entre deux plans horizontaux en résolvant l'équation de NS (simplifiée). La distance entre les deux plans est égale à h et les hypothèses simplificatrices sont

1. écoulement dans le plan $(O, x, z) \Rightarrow v_y = 0,$
2. écoulement bidimensionnel (x et z) $\Rightarrow v(x, z),$
3. écoulement laminaire selon $x \Rightarrow v_z = 0,$
4. écoulement permanent $\Rightarrow \partial_t v = 0,$
5. forces volumiques négligeables $\Rightarrow F = 0,$
6. fluide incompressible $\Rightarrow \text{div}(v) = 0,$

Les trois premières hypothèses conduisent à la simplification suivante du champ de vitesse :

$$v = v_x(x, z)e_x.$$

L'incompressibilité du fluide entraîne que v_x est indépendant de la coordonnée x :

$$\text{div}(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = v_x(z)e_x.$$

Par conséquent, le terme advectif $v \cdot \nabla v_x$ est nul :

$$v \cdot \nabla v_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.$$

D'après ce résultat, en utilisant que l'écoulement est permanent et en négligeant les forces de pesanteur, les composantes de l'équation de NS se simplifient considérablement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{d^2 v_x}{dz^2}, \end{array} \right. \quad (4.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad (4.3b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (4.3c)$$

Les équations (4.3b) et (4.3c) impliquent que la pression ne dépend pas des coordonnées y et z . Ainsi, le membre de gauche de l'équation (4.3a) ne dépend que de x . Par ailleurs, le membre de droite de cette équation ne dépend que de z . Comme deux fonctions égales ne dépendant pas des mêmes variables ne peuvent être que constantes, nous en déduisons

$$\frac{dp}{dx} = a \quad \Rightarrow \quad p(x) = ax + b, \quad (4.4)$$

où les deux constantes a et b sont déterminées par les conditions aux limites sur la pression qui diffèrent suivant le type d'écoulement. Nous avons également

$$\frac{d^2v_x}{dz^2} = \frac{a}{\mu} \quad \Rightarrow \quad v_x(z) = \frac{a}{2\mu}z^2 + cz, \quad (4.5)$$

où le coefficient c est déterminé par la condition aux limites sur la vitesse au niveau du plan supérieur. La vitesse n'a pas de terme constant car le plan inférieur est fixe ($v_x(0) = 0$).

Nous étudions successivement trois écoulements différents : un écoulement de Couette (physicien français, 1858–1943), un écoulement de Poiseuille (physicien et médecin français, 1797–1869) et une combinaison de ces deux types d'écoulement

4.1.4.1 Écoulement de Couette

La vitesse est nulle sur le plan inférieur et constante sur le plan supérieur. La pression est identique en $x = 0$ et $x = L$.

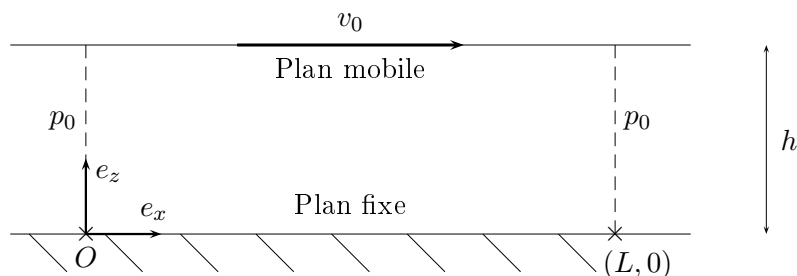


FIGURE 4.4 – Écoulement de Couette entre deux plans horizontaux.

Les conditions aux limites de pression impliquent une *pression constante* :

$$\left. \begin{array}{l} p(0) = p_0 \Rightarrow b = p_0 \\ p(L) = p_0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{p}_0.$$

Les conditions aux limites de vitesse conduisent à une *vitesse linéaire* :

$$v_x(h) = v_0 \Rightarrow ch = v_0 \Rightarrow \mathbf{v}_x = \mathbf{v}_0 \frac{z}{h}.$$

La vitesse moyenne v_{moy} suivant la verticale est définie par

$$v_{\text{moy}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h} \int_0^h v_x dz = \frac{v_0}{2}.$$

4.1.4.2 *Ecoulement de Poiseuille*

La vitesse est nulle sur les plans inférieur et supérieur. Une pression δp est imposée en $x = 0$ alors qu'une pression nulle est imposée en $x = L$.

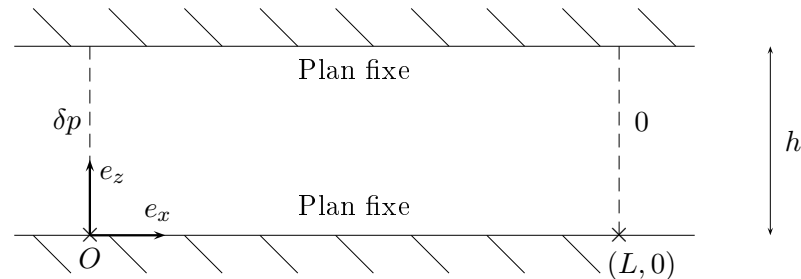


FIGURE 4.5 – Ecoulement de Poiseuille entre deux plans horizontaux.

Les conditions aux limites de pression impliquent une *pression affine* :

$$\left. \begin{array}{l} p(0) = \delta p \Rightarrow b = \delta p \\ p(L) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow aL + \delta p = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = \delta p \left(1 - \frac{x}{L} \right).$$

Les conditions aux limites de vitesse conduisent à une *vitesse parabolique* :

$$v_x(h) = 0 \Rightarrow -\frac{\delta p h^2}{2\mu L} + ch = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_x = \frac{\delta p}{2\mu L} z(h - z).$$

La vitesse moyenne v_{moy} suivant la verticale est

$$v_{\text{moy}} = \frac{\delta p}{2\mu h L} \int_0^h z(h - z) dz = \frac{\delta p h^2}{12\mu L}.$$

La vitesse maximale v_{max} est atteinte lorsque la dérivée de la vitesse s'annule :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \Rightarrow z = \frac{h}{2} \Rightarrow v_{\text{max}} = \frac{\delta p h^2}{8\mu L}.$$

4.1.4.3 *Ecoulement de Couette et de Poiseuille*

La vitesse est nulle sur le plan inférieur et constante sur le plan supérieur. Une pression $p_0 + \delta p$ est imposée en $x = 0$ alors qu'une pression constante p_0 est imposée en $x = L$.

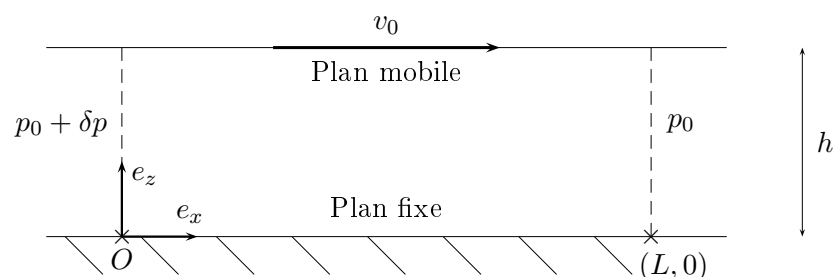


FIGURE 4.6 – Ecoulement de Couette et de Poiseuille entre deux plans horizontaux.

Les conditions aux limites de pression impliquent une *pression affine* :

$$\left. \begin{array}{l} p(0) = p_0 + \delta p \Rightarrow b = p_0 + \delta p \\ p(L) = p_0 \end{array} \right\} \Rightarrow aL + \delta p = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \delta p \left(1 - \frac{\mathbf{x}}{L}\right).$$

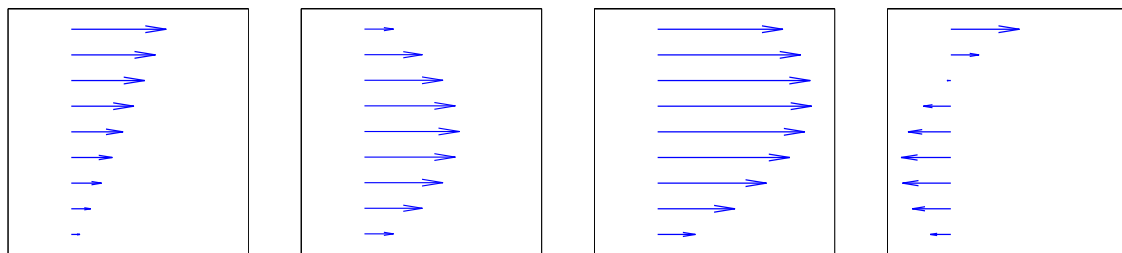
Les conditions aux limites de vitesse conduisent à une *vitesse quadratique* :

$$v_x(h) = v_0 \Rightarrow -\frac{\delta p h^2}{2\mu L} + ch = v_0 \Rightarrow \mathbf{v}_x = \mathbf{v}_0 \frac{z}{h} + \frac{\delta p}{2\mu L} z(h - z).$$

Ce champ de pression (resp. vitesse) est la somme du champ de pression (resp. vitesse) de l'écoulement de Couette et du champ de pression de l'écoulement de Poiseuille. Cela vient de la linéarité de la loi de comportement qui permet la superposition des solutions.

Pour illustrer ces différents types d'écoulement, les profils de vitesse obtenus pour $h = 60\text{cm}$, $L = 5\text{m}$ et $\mu = 10^{-3}\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ sont tracés sur la figure 4.7 en faisant varier les deux termes moteurs qui sont la vitesse et la pression. Le domaine représenté sur ces images est $[-0.1, 0.3] \times [0, 0.6]$ et les quatre configurations sont

- Couette : $v_0 = 1\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\delta p = 0$,
- Poiseuille : $v_0 = 0$ et $\delta p = 0.1\text{Pa}$,
- Couette + Poiseuille : $v_0 = 1\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\delta p = 0.1\text{Pa}$,
- Couette - Poiseuille : $v_0 = 1\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\delta p = -0.1\text{Pa}$.



Couette

Poiseuille

Couette + Poiseuille

Couette - Poiseuille

FIGURE 4.7 – Champ de vitesse suivant le type d'écoulement.

4.1.5 Loi de Poiseuille

Cette loi relie la chute de pression δp au débit Q d'un écoulement

$$\boxed{\delta p = R_h Q}$$

où le coefficient de proportionnalité R_h [$\text{Pa} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}$] s'appelle la *résistance hydraulique*. Dans le cas d'une conduite circulaire de rayon R et de longueur L , la vitesse moyenne permet de déterminer cette résistance,

$$v = \frac{\delta p R^2}{8\mu L} \Rightarrow Q = \frac{\delta p \pi R^4}{8\mu L} \Rightarrow R_h = \frac{8\mu L}{\pi R^4}.$$

De même, dans le cas d'un écoulement de largeur b entre deux plans horizontaux de longueur L et séparés d'une distance h , nous avons

$$v = \frac{\delta p h^2}{12\mu L} \Rightarrow Q = \frac{\delta p h^3 b}{12\mu L} \Rightarrow R_h = \frac{12\mu L}{h^3 b}.$$

Les associations des résistances hydrauliques obéissent aux mêmes règles que les résistances électriques ou thermiques. Les résistances en série s'ajoutent puisque le débit est conservé

$$\left. \begin{array}{l} \delta p_1 = R_{h,1} Q_1 \\ \delta p_2 = R_{h,2} Q_2 \\ Q_1 = Q_2 = Q \end{array} \right\} \Rightarrow \delta p_1 + \delta p_2 = (R_{h,1} + R_{h,2}) Q \Rightarrow \boxed{R_{h,1+2}^s = R_{h,1} + R_{h,2}}$$

Les inverses des résistances en parallèles s'ajoutent puisque la différence de pression est identique

$$\left. \begin{array}{l} \delta p_1 = R_{h,1} Q_1 \\ \delta p_2 = R_{h,2} Q_2 \\ \delta p_1 = \delta p_2 = \delta p \end{array} \right\} \Rightarrow Q_1 + Q_2 = \left(\frac{1}{R_{h,1}} + \frac{1}{R_{h,2}} \right) \delta p \Rightarrow \boxed{R_{h,1+2}^p = \frac{R_{h,1} R_{h,2}}{R_{h,1} + R_{h,2}}}$$

4.2 Théorème de Bernoulli généralisé

4.2.1 Enoncé

Le théorème de Bernoulli exprime la conservation de l'énergie en supposant qu'il y a aucune perte d'énergie. En réalité, cette hypothèse n'est jamais vérifiée totalement puisque le frottement du fluide sur une paroi entraîne une diminution de l'énergie. Dans les circuits hydrauliques, les machines apportent ou absorbent également de l'énergie. :

Théorème de Bernoulli généralisé. *Entre deux points A et B d'un circuit hydraulique dans lequel le fluide va de A vers B, on a*

$$\boxed{H_A = H_B + \Sigma H_l + \Sigma H_s + \Sigma H_m^{\text{abs}} - \Sigma H_m^{\text{app}}}, \quad (4.6)$$

où ΣH_l et ΣH_s sont respectivement l'ensemble des pertes de charge linéaires et des pertes de charge singulières, ΣH_m^{abs} et ΣH_m^{app} sont respectivement l'ensemble des charges dues aux machines absorbant et apportant de la charge.

Démonstration. Considérons un écoulement de fluide dans un circuit hydraulique sans machine d'un point A vers un point B. Le niveau énergétique décroît lorsque l'on suit une trajectoire de sorte que nous avons

$$H_A = H_B + \Sigma H_{AB},$$

où ΣH_{AB} est l'ensemble des *pertes de charge* entre les points A et B qui sont de deux natures : *linéaires* ou *singulières*. Les pertes linéaires ΣH_l proviennent du frottement du fluide sur les parois ainsi que du frottement interne alors que les pertes singulières ΣH_s sont dues aux singularités rencontrées dans le circuit hydraulique (comme les coudes, élargissements et rétrécissements).

Considérons maintenant un écoulement de fluide dans un circuit hydraulique avec machine et sans perte de charge d'un point A vers un point B. Nous avons alors

$$H_A = H_B + \Sigma H_m^{\text{abs}} - \Sigma H_m^{\text{app}}.$$

En effet, les machines hydrauliques sont de deux types. Les machines *absorbant* de la charge hydraulique ΣH_m^{abs} génèrent de l'énergie mécanique ou électrique. Ces machines, comme les turbines, consomment de la charge et cette diminution est similaire à celle observée lors d'une singularité. Les machines *apportant* de la charge hydraulique ΣH_m^{app} consomment de l'énergie mécanique ou électrique. Ces machines, comme les pompes, fournissent de la charge et c'est le seul cas où l'on peut observer une augmentation de charge dans un écoulement.

La prise en compte des pertes de charge et des machines conduit finalement à l'équation (4.6). \square

4.2.2 Perte de charge linéaire

La perte de charge linéaire H_1 d'un écoulement ayant une vitesse v dans une conduite circulaire de diamètre D et de longueur L est définie par

$$H_1 \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \frac{L v^2}{D 2g}$$

où λ est un coefficient sans dimension appelé *coefficient de perte de charge linéaire* qui dépend du régime d'écoulement et de la nature de la paroi de la conduite (rugosité). C'est assez intuitif que la perte de charge linéaire soit proportionnelle au terme cinétique de la charge hydraulique H puisqu'un écoulement isobare dans un plan horizontal présente aussi des pertes d'énergie. De même, il est naturel que ce coefficient soit proportionnel à la longueur et inversement proportionnel au diamètre de la conduite. Nous donnons maintenant l'expression du coefficient de perte de charge linéaire suivant le régime d'écoulement.

4.2.2.1 Régime laminaire

La vitesse moyenne dans une conduite circulaire de rayon R (de diamètre D) et de longueur L soumise à une différence de pression δp en entrée est

$$v = \frac{\delta p R^2}{8\mu L} \Rightarrow \delta p = \frac{8\mu L v}{R^2} \Rightarrow \delta H = \frac{8\mu L v}{\rho g R^2} = \frac{32\nu L v}{g D^2}.$$

Par identification avec l'expression générale de la perte de charge linéaire, nous obtenons la *formule de Poiseuille* qui exprime le coefficient de perte de charge en régime laminaire en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement :

$$\lambda \frac{L v^2}{D 2g} = \frac{32\nu L v}{g D^2} \Rightarrow \lambda \frac{v}{2} = \frac{32\nu}{D} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{64}{Re}}.$$

4.2.2.2 Répartition de vitesse dans une conduite lisse

Afin d'exprimer le coefficient de perte de charge dans les différents régimes turbulents, nous étudions la répartition de vitesse dans une conduite circulaire de rayon R , de section S et de longueur L .

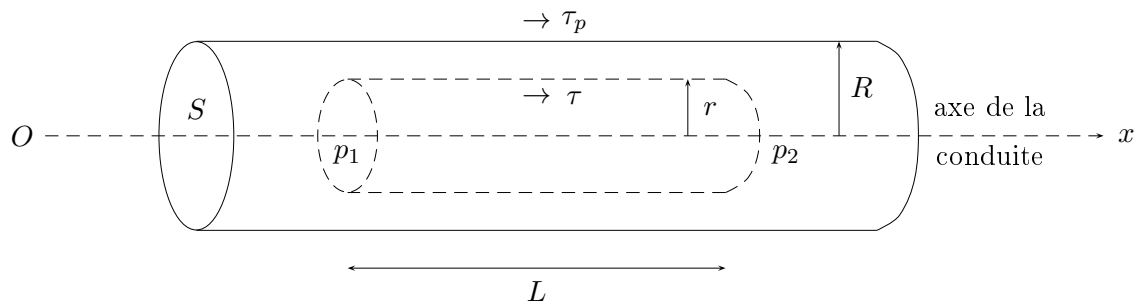


FIGURE 4.8 – Écoulement dans une conduite circulaire.

L'équilibre des forces sur la portion de cylindre de rayon R et de longueur L s'écrit

$$S p_1 - S p_2 + 2\pi R L \tau_p = 0 \Rightarrow \tau_p = \frac{R}{2L} (p_2 - p_1), \quad (4.7)$$

où τ_p désigne la contrainte à la paroi qui s'appelle *la contrainte pariétale*. De même, l'équilibre des forces sur le cylindre intérieur de rayon r est

$$\tau = \frac{r}{2L}(p_2 - p_1) \stackrel{(4.7)}{\Rightarrow} \tau = \frac{r}{R}\tau_p. \quad (4.8)$$

La contrainte varie donc linéairement depuis l'axe de la conduite où elle est nulle jusqu'à la paroi. La *vitesse de frottement* v_* est définie en fonction de la contrainte pariétale,

$$v_* \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}. \quad (4.9)$$

En notant $\delta p = p_2 - p_1$, l'équation (4.7) donne

$$\delta p = 4\tau_p \frac{L}{D} \Rightarrow \delta H = 4 \frac{\tau_p}{\rho} \frac{L}{gD} \stackrel{(4.9)}{=} 4 \frac{v_*^2 L}{gD},$$

où $D = 2R$ désigne le diamètre de la conduite. Par identification avec l'expression générale de la perte de charge linéaire, nous avons

$$\lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = 4 \frac{v_*^2 L}{gD} \Rightarrow \boxed{v_* = v \sqrt{\frac{\lambda}{8}}}. \quad (4.10)$$

Cette relation entre la vitesse de frottement, la vitesse moyenne et le coefficient de perte de charge est valable pour toutes les formes de conduite et tous les régimes d'écoulement.

4.2.2.3 Régime turbulent lisse

Dans le cas d'un écoulement turbulent² lisse, la vitesse dans une conduite circulaire est donnée par la loi logarithmique suivante

$$\frac{v}{v_*} = 5.75 \log \left(\frac{Rv_*}{\nu} \right) + 1.75. \quad (4.11)$$

L'équation (4.10) donne

$$\frac{Rv_*}{\nu} = \frac{Dv}{2\nu} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = \frac{Re}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{8}},$$

de sorte que l'équation (4.11) peut se réécrire

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 5.75 \log \left(\frac{Re}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \right) + 1.75 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.03 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0.91.$$

A cette relation, on préfère la *formule de Prandtl-Von Karman* (physicien allemand, 1875–1953 et physicien hongrois, 1881–1963) qui vérifie mieux les résultats expérimentaux :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0.8} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right). \quad (4.12)$$

2. Nous renvoyons au chapitre suivant concernant les écoulements turbulents notamment la démonstration permettant d'obtenir la loi logarithmique dans un écoulement turbulent entre deux plans horizontaux.

4.2.2.4 Régime turbulent rugueux

Dans le cas d'un écoulement turbulent rugueux, le coefficient de perte de charge est relié à la rugosité relative ϵ/D par la formule suivante

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\frac{D}{\epsilon} \right) + 1.14} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.7D} \right). \quad (4.13)$$

La grandeur ϵ [mm] désigne la rugosité qui est la hauteur des aspérités des parois de la conduite.

4.2.2.5 Régime turbulent mixte

Dans ce régime, le coefficient de perte de charge dépend du nombre de Reynolds et de la rugosité relative. Plusieurs formules sont proposées pour ce type de régime. Moody (hydraulicien américain, 1880–1953) et Colebrook (physicien anglais, 1883–1967) proposent respectivement les formules suivantes

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{R_e}{260} \frac{\epsilon}{D} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3.7D} \right)}$$

C'est avec cette dernière formule, rassemblant les équations (4.12) et (4.13), que sont tracées les différentes courbes du diagramme de Moody représenté ci-après et qui permet de déterminer le coefficient de perte de charge linéaire.

4.2.2.6 Récapitulatif concernant les pertes de charge linéaires

Les pertes de charge dans les écoulements proviennent de la viscosité du fluide et de la turbulence. Le nombre de Reynolds renseigne sur l'importance relative de ces deux causes et l'action des parois sur l'écoulement se manifeste par la hauteur ϵ des rugosités :

- si $R_e < 2000$, l'écoulement est laminaire et les pertes de charge sont dues à la viscosité,
- si $R_e > 4000$ et que la rugosité de la conduite est faible, une couche laminaire se développe le long des parois et la perte de charge est due à la viscosité et à la turbulence. Il s'agit du régime turbulent lisse dans lequel λ dépend uniquement du nombre de Reynolds,
- si $R_e > 4000$ et que la rugosité de la conduite est suffisamment grande pour détruire la couche laminaire, la viscosité n'intervient plus. Il s'agit du régime turbulent rugueux dans lequel λ dépend uniquement de la rugosité relative.

Le passage d'un régime turbulent à un autre se fait progressivement dans des zones de transition.

4.2.2.7 Exemple de calcul du coefficient de perte de charge

On considère un écoulement d'eau ($\nu = 10^{-6} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) ayant un débit $Q = 400 \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$ dans une conduite de diamètre $D = 40 \text{cm}$ avec une rugosité $\epsilon = 1 \text{mm}$. Le nombre de Reynolds et la rugosité relative sont

$$\frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} = 1.28 \cdot 10^6 \quad \text{et} \quad \frac{\epsilon}{D} = 2.5 \cdot 10^{-3}.$$

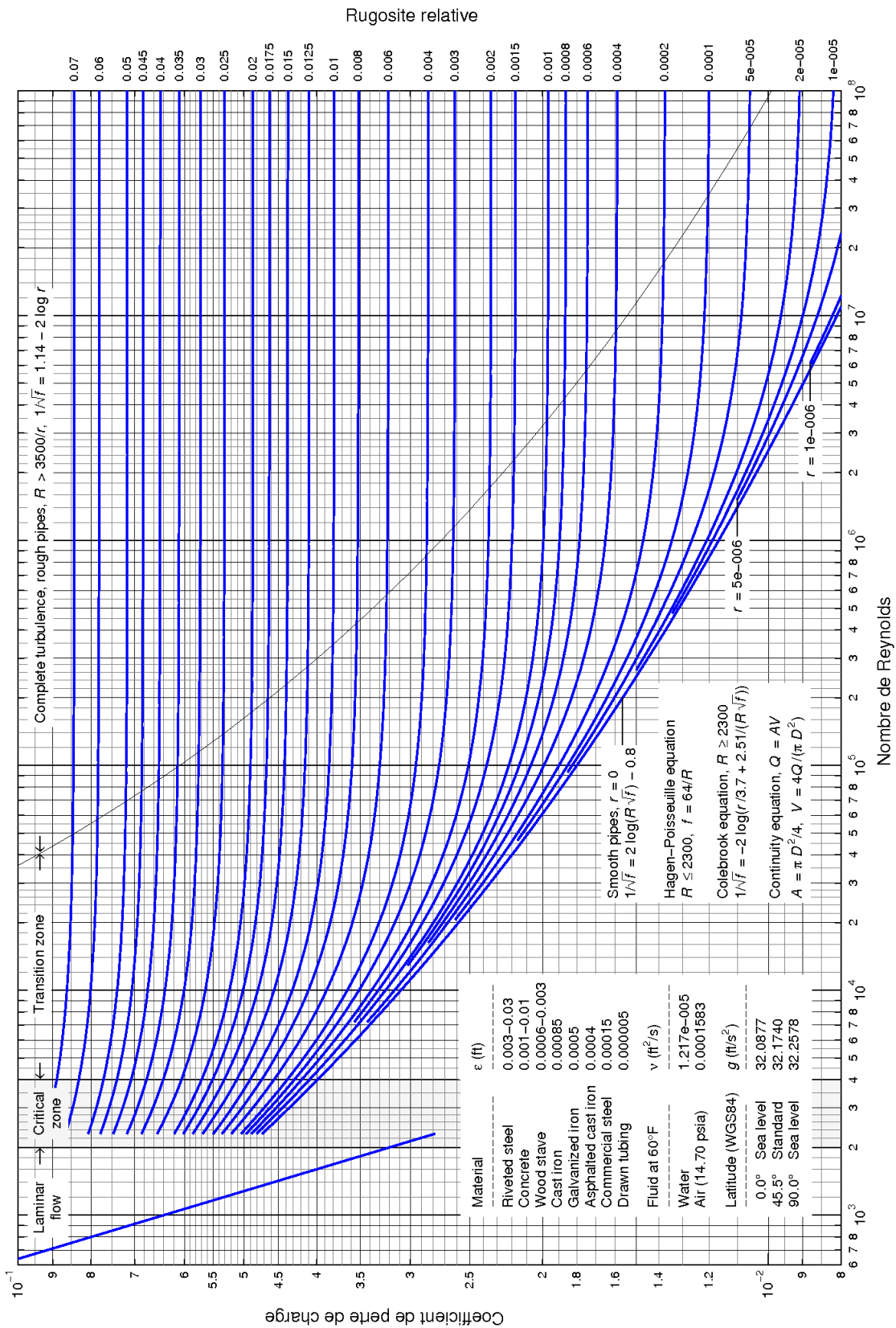
L'écoulement étant turbulent, le diagramme de Moody donne $\lambda = 0.025$.

On considère un écoulement de pétrole ($\nu = 3 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) ayant un débit $Q = 80 \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$ dans une conduite de diamètre $D = 20 \text{cm}$ avec une rugosité $\epsilon = 0.1 \text{mm}$. Le nombre de Reynolds et la rugosité relative sont

$$R_e = \frac{4Q}{\pi D \nu} = 1700 \quad \text{et} \quad \frac{\epsilon}{D} = 5 \cdot 10^{-4}.$$

L'écoulement étant laminaire, la formule de Poiseuille donne directement $\lambda = 0.038$.

4.2.2.8 Diagramme de Moody



4.2.3 Perte de charge singulière

La perte de charge singulière H_s est définie par

$$H_s \stackrel{\text{def}}{=} k \frac{v^2}{2g}$$

où k est un coefficient sans dimension appelé *coefficient de perte de charge singulière*.

4.2.3.1 Perte de charge dans un élargissement brusque

Soit une conduite de section S_A qui devient brutalement de section S_B comme représentée sur la figure 4.9. Les pertes de charge linéaires sont considérées négligeables devant la perte singulière provoquée par le divergent. L'écoulement est permanent et la pression au niveau du changement de section est supposée égale à la pression d'entrée.

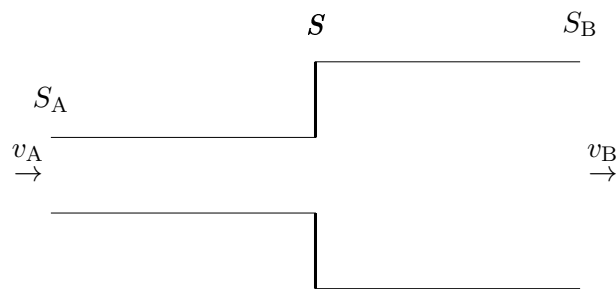


FIGURE 4.9 – Divergent.

La perte de charge étant essentiellement singulière, le théorème de Bernoulli appliqué au niveau des sections d'entrée et de sortie est

$$H_A = H_B + H_s \quad \Rightarrow \quad H_s = H_A - H_B = \frac{p_A - p_B}{\rho g} + \frac{v_A^2 - v_B^2}{2g}. \quad (4.14)$$

Par ailleurs, la conservation de la masse s'écrit

$$Q = S_A v_A = S_B v_B \quad (4.15)$$

Nous supposons que les forces extérieures qui s'appliquent sur le fluide sont les forces de pression. La pression de la section $S = S_B - S_A$ étant égale à la pression de la section d'entrée, le théorème d'Euler s'écrit

$$p_A S_A - p_B S_B + p_A S = \rho Q (v_B - v_A) \stackrel{(4.15)}{\Rightarrow} p_A - p_B = \rho (v_B^2 - v_A v_B). \quad (4.16)$$

En introduisant (4.16) dans (4.14), nous obtenons

$$H_s = \frac{(v_B^2 - v_A v_B)}{g} + \frac{(v_A^2 - v_B^2)}{2g} = \frac{1}{2g} (v_A - v_B)^2 \stackrel{(4.15)}{=} \frac{v_A^2}{2g} \left(1 - \frac{S_A}{S_B}\right)^2.$$

Par identification avec l'expression générale d'une perte de charge singulière, nous obtenons le coefficient de perte de charge dans un divergent brutal suivant les sections d'entrée et de sortie,

$$k_{\text{div}} = \left(1 - \frac{S_A}{S_B}\right)^2.$$

Notons qu'en l'absence de variation de section, ce coefficient s'annule ce qui traduit qu'il n'y a aucune perte de charge. Au contraire, si la section de sortie est fortement supérieure à la section d'entrée, ce coefficient tend vers 1 ce qui correspond à la perte de charge maximale qui est égale au terme cinétique de la charge.

4.2.3.2 Autres pertes de charge

Il est délicat de donner une liste exhaustive du coefficient de perte de charge k puisque ce coefficient dépend de la nature de la singularité (diffuseur, raccord, coude, té, vanne, clapets, ...), de ses propriétés géométriques (section, angle) ainsi que de la vitesse de l'écoulement.

4.2.4 Applications

Le théorème de Bernoulli généralisé permet le dimensionnement des circuits hydrauliques. Lorsque les pertes de charge (linéaires et singulières) sont déterminées dans les différentes parties du circuit, il est intéressant de tracer le *diagramme de charge* qui est un graphique représentant la charge hydraulique en fonction de l'abscisse curviligne en suivant l'écoulement. Nous allons illustrer cette notion en considérant par exemple un circuit contenant une pompe **p**, une turbine **T** et quatre coudes. Trois conduites différentes, ayant respectivement un coefficient de pertes de charge linéaire λ_1 , λ_2 et λ_3 , sont utilisés comme le représente la figure (4.10). Le coefficient de perte de charge de la turbine est k_1 , celui des coudes est noté k_2 et celui provoqué par le divergent situé au point B est k_3 .

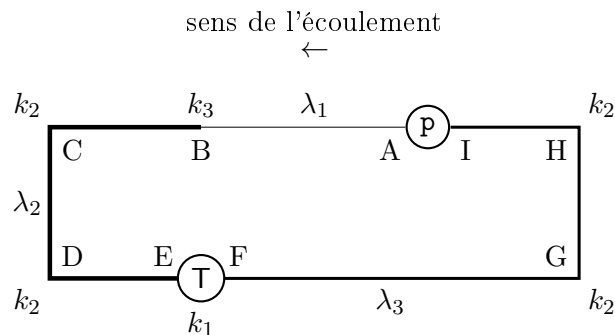


FIGURE 4.10 – Exemple de circuit hydraulique.

Comme attendu, nous remarquons sur le diagramme de charge du circuit représenté ci-dessous que les pertes de charge linéaires entraînent des diminutions progressives de la charge alors que les pertes de charge singulières provoquent des diminutions brutales. Par ailleurs, la pompe est la seule machine capable d'apporter de la charge dans le circuit.

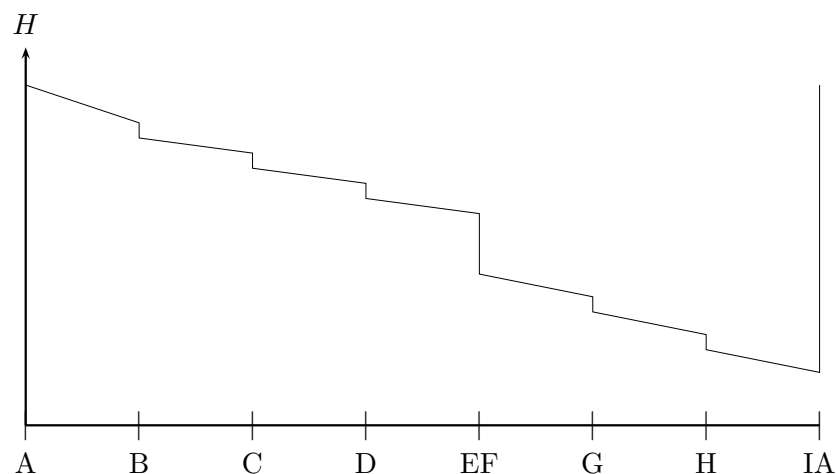


FIGURE 4.11 – Diagramme de charge du circuit.

4.3 Couche limite

4.3.1 Présentation

Nous considérons un écoulement bidimensionnel plan au niveau d'une paroi plane située dans le plan perpendiculaire à l'écoulement (plan Oxy) comme le montre la figure 4.12. Cette paroi est de longueur L et l'écoulement est unidirectionnel (sens des x positifs) avant la paroi, permanent et soumis uniquement à la pesanteur. L'hypothèse des fluides parfaits considère que les contraintes se limitent à la pression en supprimant les contraintes visqueuses. En réalité, les effets visqueux d'un fluide ne sont pas négligeables dans toutes les situations. En particulier, la viscosité du fluide impose toujours que la vitesse de l'écoulement soit nulle au niveau d'une paroi solide ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de glissement utilisée pour les écoulements de fluide parfait. Ces deux situations sont conciliables puisqu'il existe une *couche limite* proche de la paroi dans laquelle les effets visqueux sont importants et en dehors de laquelle ces effets sont négligeables³.

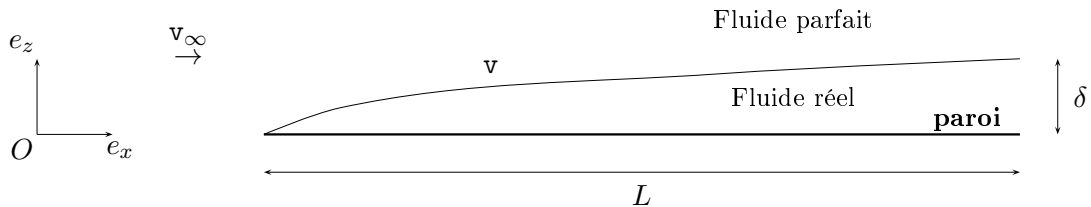


FIGURE 4.12 – Couche limite laminaire au niveau d'une paroi plane.

L'épaisseur de la couche limite est notée δ et nous supposons que cette épaisseur est faible devant la longueur de la paroi : $L \gg \delta$. La vitesse en dehors de la couche limite est notée \mathbf{v} et la vitesse non perturbée par la couche limite est notée \mathbf{v}_∞ : $\lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{v}(x, z) = \mathbf{v}_\infty(x)$.

4.3.2 Equations de Prandtl

Dans le cas d'un écoulement plan soumis à la pesanteur, les deux composantes de l'équation de NS s'écrivent

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \end{cases}$$

où $p_s \stackrel{\text{def}}{=} p + \rho g z$ est la pression statique (voir page 43). L'incompressibilité du fluide donne

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{v_x}{L} \right| \simeq \left| \frac{v_z}{\delta} \right|,$$

3. L'écoulement peut se calculer dans cette zone par les équations d'Euler ou par la théorie du potentiel.

ce qui implique que la vitesse verticale est faible devant la vitesse horizontale. Cette relation permet une estimation des termes advectifs et visqueux de l'équation de NS :

$$\underbrace{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}}_{\frac{v_x^2}{L}} + \underbrace{v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}}_{\frac{v_x^2}{L}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial x} = \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}_{\nu \frac{v_x}{L^2}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}_{\nu \frac{v_x}{\delta^2}}, \quad (4.18)$$

$$\underbrace{v_x \frac{\partial v_z}{\partial x}}_{\frac{v_x^2 \delta}{L^2}} + \underbrace{v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}_{\frac{v_x^2 \delta}{L^2}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial z} = \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}}_{\nu \frac{v_x \delta}{L^3}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}_{\nu \frac{v_x}{\delta L}}. \quad (4.19)$$

Compte-tenu de ces estimations et comme $L \gg \delta$, les deux termes advectifs (resp. visqueux) de l'équation (4.19) sont négligeables puisque leurs ordres de grandeur diffèrent du facteur δ/L par rapport aux termes advectifs (resp. visqueux) de l'équation (4.18). Le premier terme du membre de droite de l'équation (4.18) est également négligeable devant le second terme du membre de droite de cette même équation. Les équations qui régissent l'écoulement dans la couche limite laminaire s'appellent les équations de Prandtl (physicien allemand, 1875–1953) et s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

Les conditions d'imperméabilité et d'adhérence à la paroi impose les vitesses normale et tangentielle nulles :

$$v_x(\cdot, 0) = v_z(\cdot, 0) = 0.$$

Les *conditions de raccord avec l'écoulement extérieur* imposent la continuité de la vitesse et de la pression :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} v_x(x, z) = v_\infty(x) \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} p_s(x, z) = p_\infty(x),$$

où p_∞ est la pression non perturbée par la couche limite.

Nous terminons par préciser que l'ordre de grandeur des termes d'inertie et de viscosité permet d'avoir une estimation de l'épaisseur de la couche limite en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement

$$\frac{v_x^2}{L} \simeq \nu \frac{v_x}{\delta^2} \quad \Rightarrow \quad \delta^2 \simeq \nu \frac{L}{v_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta \simeq \frac{L}{\sqrt{Re}}}$$

4.3.3 Equation de Blasius

Nous supposons que la pression statique est une constante connue dans l'écoulement de sorte que les équations de Prandtl se simplifient comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (4.21a)$$

$$(4.21b)$$

Nous cherchons une solution autosimilaire, c'est-à-dire telle que les profils de vitesse sont identiques à toutes les abscisses, en introduisant la coordonnées spatiale sans dimension ζ :

$$\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z}{\delta(x)} = z \sqrt{\frac{\mathbf{v}_x}{\nu x}} \quad \text{car} \quad \delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\nu x}{\mathbf{v}_x}}.$$

Nous cherchons la fonction $f(\zeta)$ vérifiant

$$v_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}_x f(\zeta).$$

Nous calculons successivement les trois termes de l'équation (4.21a). D'après la définition de la variable ζ , nous avons

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{z}{2x} \sqrt{\frac{\mathbf{v}_x}{\nu x}} = -\frac{\zeta}{2x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}_x}{\nu x}}.$$

D'après la définition de la fonction v_x , nous avons

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \mathbf{v}_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} f'(\zeta) = -\frac{\mathbf{v}_x \zeta}{2x} f'(\zeta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \mathbf{v}_x \frac{\partial \zeta}{\partial z} f'(\zeta) = \mathbf{v}_x \sqrt{\frac{\mathbf{v}_x}{\nu x}} f'(\zeta).$$

Le premier terme d'advection est

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\mathbf{v}_x^2 \zeta}{2x} f(\zeta) f'(\zeta), \quad (4.22)$$

et le terme de diffusion est

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{\mathbf{v}_x^2}{x} f''(\zeta). \quad (4.23)$$

Nous utilisons l'incompressibilité du fluide pour calculer la composante v_z de la vitesse :

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial \zeta} \sqrt{\frac{\mathbf{v}_x}{\nu x}} \stackrel{(4.21b)}{=} -\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\mathbf{v}_x \zeta}{2x} f'(\zeta) \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial \zeta} = \sqrt{\frac{\nu x}{\mathbf{v}_x}} \frac{\mathbf{v}_x \zeta}{2x} f'(\zeta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathbf{v}_x \nu}{x}} \zeta f'(\zeta).$$

Une intégration par parties, en tenant compte de la condition $v_z(z=0) = 0$, donne

$$v_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathbf{v}_x \nu}{x}} \left(\zeta f(\zeta) - \int_0^\zeta f(\xi) d\xi \right).$$

Ainsi, le second terme d'advection est

$$v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\mathbf{v}_x^2}{2x} f'(\zeta) \left(\zeta f(\zeta) - \int_0^\zeta f(\xi) d\xi \right). \quad (4.24)$$

En substituant les trois égalités (4.22), (4.23) et (4.24) dans l'équation (4.21a), nous obtenons l'équation de Blasius :

$$\boxed{f''(\zeta) + \frac{1}{2} f'(\zeta) \int_0^\zeta f(\xi) d\xi = 0.}$$

Nous pouvons noter la disparition explicite des coordonnées x et z dans cette équation puisqu'elles apparaissent seulement *via* ζ . La condition d'adhérence devient

$$\underline{f(0) = 0} \quad \text{car} \quad z = 0 \Rightarrow \zeta = 0 \quad \text{et} \quad v_x = 0 \Rightarrow f = 0,$$

et la condition de raccord avec l'écoulement extérieur devient

$$\underline{\lim_{\zeta \rightarrow \infty} f(\zeta) = 1} \quad \text{car} \quad z \rightarrow \infty \Rightarrow \zeta \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad v_x = \mathbf{v}_\infty \Rightarrow f = 1.$$

La solution de l'équation de Blasius obtenue numériquement est représentée sur la figure 4.13. Le profil de vitesse est très proche d'une droite lorsque ζ est inférieur à 2 et devient constant lorsque ζ est supérieur à 5.

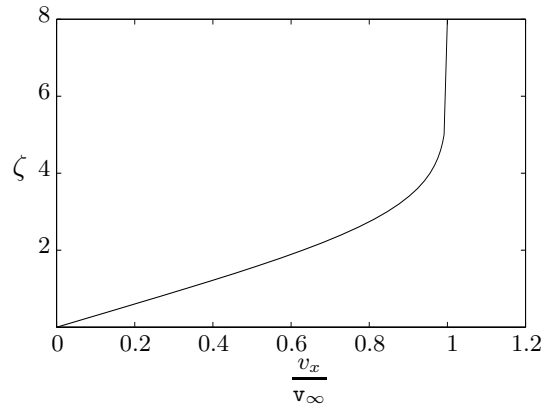


FIGURE 4.13 – Profil de vitesse dans la couche limite sur une plaque plane.

4.4 Similitude

4.4.1 Equation de Navier–Stokes adimensionnalisée

Théorème 17. *L'équation de Navier–Stokes associée à des variables sans dimensions s'écrit*

$$S_t \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \cdot \nabla^* v^* + E_u \nabla^* p^* = \frac{1}{F_r^2} F^* + \frac{1}{R_e} \Delta^* v^*,$$

où S_t , E_u , F_r et R_e désignent les nombres de Strouhal, d'Euler, de Reynolds et de Froude définis par

$$S_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L}{VT}, \quad E_u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P}{\rho V^2}, \quad F_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V}{\sqrt{gL}} \quad \text{et} \quad R_e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{VL}{\nu}.$$

Démonstration. Pour obtenir l'équation de NS adimensionnalisée, nous associons aux grandeurs physiques (x, y, z, t, v, p, F) les grandeurs sans dimension $(x^*, y^*, z^*, t^*, v^*, p^*, F^*)$ définies par

$$x \stackrel{\text{def}}{=} Lx^*, \quad y \stackrel{\text{def}}{=} Ly^*, \quad z \stackrel{\text{def}}{=} Lz^*, \quad t \stackrel{\text{def}}{=} Tt^*, \quad v \stackrel{\text{def}}{=} Vv^*, \quad p \stackrel{\text{def}}{=} Pp^* \quad \text{et} \quad F \stackrel{\text{def}}{=} gF^*,$$

où les quantités L , T , V et P sont respectivement une longueur, un temps, une vitesse et une pression caractéristique de l'écoulement. Nous définissons également les opérateurs gradient ∇^* et laplacien Δ^* associés aux coordonnées (x^*, y^*, z^*) . L'introduction des variables sans dimension dans l'équation de NS donne

$$\frac{V}{T} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{V^2}{L} v^* \cdot \nabla^* v^* + \frac{P}{\rho L} \nabla^* p^* = gF^* + \frac{\nu V}{L^2} \Delta^* v^*.$$

En multipliant par L/V^2 , nous obtenons l'équation souhaitée. \square

Le *nombre de Strouhal* S_t est le rapport entre le temps d'advection (L/V) et le temps d'instantanéité (T). Le *nombre d'Euler* E_u est la moitié du rapport entre les énergies volumiques de pression (P) et cinétique ($\rho V^2/2$). Le *nombre de Froude* F_r est la racine carrée du rapport entre la force d'inertie (V^2/L) et la pesanteur (g). Le nombre de Reynolds R_e est le rapport entre la force d'inertie (V^2/L) et la force visqueuse ($\nu V/L^2$).

4.4.2 Théorème de Vaschy–Buckingham

L'analyse dimensionnelle repose sur le théorème de Vaschy–Buckingham (physicien français, 1857–1899 et physicien américain, 1867–1940) dont voici l'énoncé :

Théorème de Vaschy–Buckingham. *Toute relation entre n paramètres faisant intervenir p unités indépendantes peut se mettre sous la forme d'une relation entre $(n - p)$ paramètres sans dimension.*

Démonstration. Nous procédons par récurrence.

• *Etape 1 : vérification sur deux exemples.*

– La relation qui relie la surface S d'un carré à la mesure c de son côté comprend deux paramètres (surface, côté) faisant intervenir la même unité (m). Il y a un seul paramètre sans dimension (égal à 1) faisant intervenir ces deux paramètres qui est S/c^2 .

– Dans le cas de l'équation de Navier–Stokes, il y a 7 paramètres (longueur, temps, vitesse, pression, masse volumique, viscosité dynamique et accélération de la pesanteur) faisant intervenir 3 unités (kg, m, s), ce qui donne 4 relations sans dimension : nombres de Strouhal, d'Euler, de Froude et de Reynolds.

• *Etape 2 : hérédité.*

Nous supposons le théorème vérifié pour n paramètres exprimés dans p unités indépendantes et ajoutons un $n + \text{unième}$ paramètre. Deux cas peuvent se présenter :

– le $n + \text{unième}$ paramètre s'exprime à partir des p unités des n premiers paramètres. Il est alors possible de former un nouveau nombre adimensionnel avec le $n + \text{unième}$ paramètre et un groupement des n premiers paramètres. Le théorème est donc vérifié avec $(n + 1)$ paramètres, p unités et $(n - p + 1)$ nombres adimensionnels.

– le $n + \text{unième}$ paramètre s'exprime avec une nouvelle unité. Il est alors impossible d'écrire une relation homogène avec les $n + 1$ paramètres, dont seul le dernier contient l'une des unités. Il faut donc introduire un $n + \text{deuxième}$ paramètre qui s'exprime suivant la nouvelle unité pour former un nouveau nombre adimensionnel avec le $n + \text{unième}$ et le $n + \text{deuxième}$ paramètre. Le théorème est donc vérifié avec $(n + 2)$ paramètres, $(p + 1)$ unités et $(n - p + 1)$ nombres adimensionnels. \square

4.4.3 Applications

L'analyse dimensionnelle est à la base des études expérimentales utilisant les modèles réduits qui peuvent être utilisés pour une large gamme de problèmes comme les écoulements en rivière, les efforts exercés par la houle sur les structures côtières ou offshore, l'étude du vent dans un quartier d'habitation, les sollicitations aérodynamiques d'un pont à haubans, la dispersion de polluants dans l'air ou dans l'eau, les machines hydrauliques et les études de carènes.

Dans l'étude d'un phénomène sur maquette à échelle réduite, il faut déterminer les conditions de similitude, c'est-à-dire les règles de transposition qui permettent d'interpréter quantitativement les mesures effectuées sur la maquette pour trouver les valeurs des grandeurs caractéristiques du phénomène réel. Deux systèmes sont en *similitude complète* lorsque tous les nombres sans dimension ont la même valeur pour les deux systèmes. En général, il est impossible de réaliser toutes les conditions de similitudes. On choisit alors d'imposer les égalités pour les grandeurs jugées importantes : il s'agit de *similitude restreinte*.

Chapitre 5

Écoulements turbulents

Les écoulements turbulents sont rencontrés dans la plupart des disciplines faisant appel à la mécanique des fluides. Ces écoulements possèdent une dynamique complexe et les critères permettant de définir de tels écoulements sont variés car il n'existe pas de définition de la turbulence. L'objectif de ce chapitre est de donner quelques éléments sur la turbulence et plusieurs aspects relatifs à ce phénomène ne sont pas abordés.

Ce chapitre contient deux parties. La première partie contient des notions générales : l'expérience de Reynolds, la caractérisation de la turbulence et les approches de modélisation possibles sont présentées de façon succincte. La seconde partie concerne la modélisation statistique qui est une approche possible reposant sur l'équation de Reynolds. Deux modèles de fermeture sont indiqués et l'écoulement de Poiseuille entre deux plans horizontaux est présenté.

5.1 Notions générales sur la turbulence

5.1.1 Expérience de Reynolds

Reynolds réalisa en 1883 des expériences sur les différents régimes d'écoulement dans une conduite rectiligne en faisant varier le débit de l'écoulement, le diamètre de la conduite ainsi que le type de fluide.

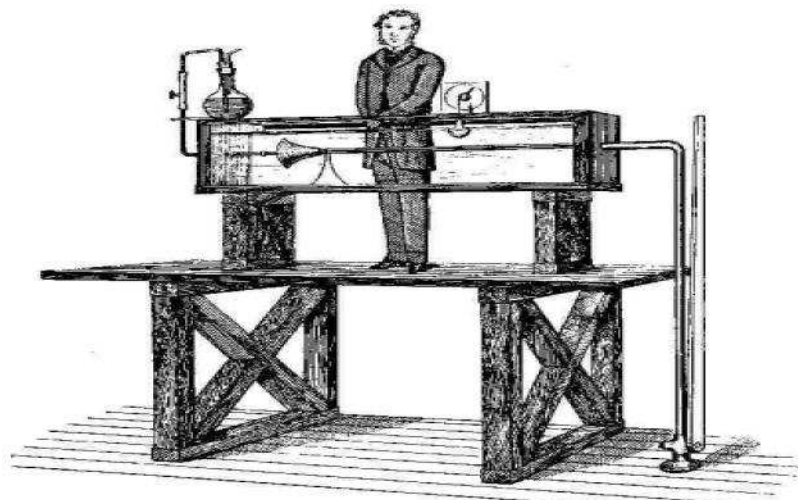


FIGURE 5.1 – Dispositif des expériences de Reynolds.

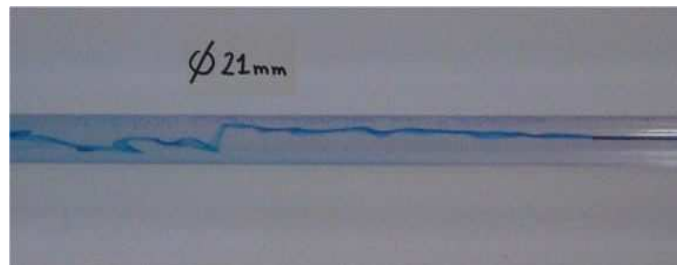
Les résultats de ces expériences ont montré qu'il y avait deux régimes d'écoulement. Le régime est *laminaire* quand les variations spatiales et temporelles de la vitesse et de la pression sont faibles et le régime est *turbulent* quand ces variations sont fortes. Ces régimes dépendent de la vitesse V de l'écoulement, de la masse volumique ρ et de la viscosité dynamique μ du fluide et du diamètre D de la conduite. Ils se distinguent suivant la valeur du nombre de Reynolds

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu},$$

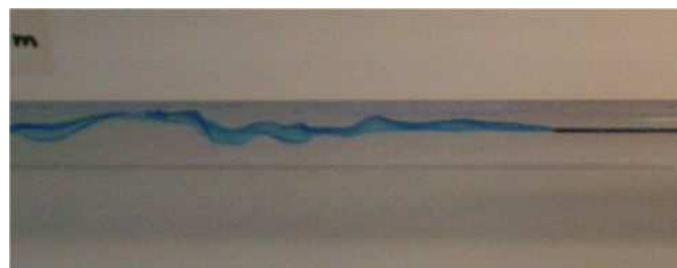
et la classification est

- $Re < 2000$ correspond au cas laminaire,
- $2000 < Re < 4000$ correspond au cas transitoire,
- $Re > 4000$ correspond au cas turbulent.

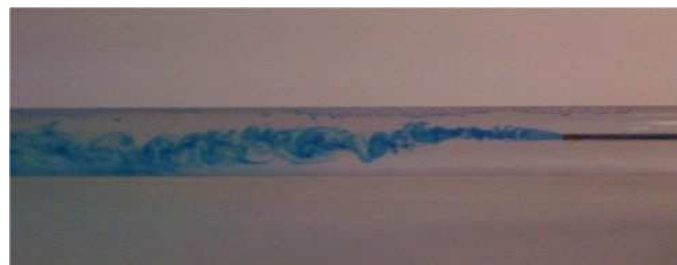
Différents régimes sont représentés ci-dessous¹.



Régime laminaire



Régime transitoire



Régime turbulent

FIGURE 5.2 – Différents régimes d'écoulement suivant le nombre de Reynolds.

1. Ces images proviennent du site de l'université de Nancy :
<http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/Physique/Tp-phys/Term/Reynolds/Reynolds3.htm>

5.1.2 Caractérisation de la turbulence

Comme le montre les expériences de Reynolds, la manifestation la plus visible d'un écoulement turbulent est le caractère instationnaire et non uniforme du champ de vitesse. Il en est de même du champ de pression qui est très irrégulier dans le temps et l'espace. Plus précisément, des structures tourbillonnaires tridimensionnelles apparaissent de façon aléatoire dans un écoulement turbulent ce qui se traduit par un champ de vitesse rotationnel. Plusieurs échelles spatiales coexistent puisque ces tourbillons ont des tailles variables et une propriété classiquement rencontrée dans les écoulements turbulents est la cascade d'énergie : la division des grands tourbillons en tourbillons plus petits permet un transfert d'énergie des grandes échelles vers les petites. Ce transfert d'énergie peut également s'effectuer des petites structures tourbillonnaires vers les plus grandes. Une autre caractérisation de la turbulence est la forte sensibilité aux conditions initiales ce qui la rend difficilement prévisible puisqu'une faible variation des données initiales de l'écoulement peut provoquer des modifications importantes et conduire à des états totalement différents. Enfin, la turbulence est un phénomène diffusant fortement toute quantité transportée et dissipant fortement l'énergie cinétique et la chaleur.

5.1.3 Approches possibles

La turbulence peut être étudiée selon les approches suivantes :

- La *simulation statistique* décompose les champs de vitesse et de pression en valeurs moyennes et en fluctuations. Présenté à la section suivante, ce type d'approche repose sur l'équation de Reynolds ainsi que sur un modèle de fermeture (à zéro, une ou deux équations) décrivant la turbulence.
- La *simulation numérique directe* (Direct Numerical Simulation) est basée sur la résolution de l'équation de NS pour représenter les phénomènes observés. La résolution numérique à des échelles spatiales et temporelles adaptées permet d'avoir les informations locales nécessaires à la détermination des champs moyens.
- La *simulation des grandes échelles* (Large Eddy Simulation) est une approche intermédiaire entre les deux approches précédentes puisqu'elle sépare les grandes échelles simulées directement et les petites échelles représentées par des modèles dit de sous-maille.

5.2 Modélisation statistique

5.2.1 Décomposition de Reynolds

Dans l'approche statistique des écoulements turbulents, la décomposition de Reynolds sépare le champ de vitesse v (et le champ de pression) en un champ moyen noté \bar{v} ou $\langle v \rangle$ et un champ fluctuant noté v' :

$$v(\mathbf{x}, t) = \langle v(\mathbf{x}, t) \rangle + v'(\mathbf{x}, t).$$

Les moyennes possibles sont la *moyenne temporelle* $\langle \rangle_t$ et la *moyenne statistique* $\langle \rangle_s$,

$$\langle v(\mathbf{x}, t) \rangle_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} v(\mathbf{x}, t) dt = \bar{v}(\mathbf{x}),$$

$$\langle v(\mathbf{x}, t) \rangle_s \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i(\mathbf{x}, t) = \bar{v}(\mathbf{x}, t),$$

où $v_i(\mathbf{x}, t)$ désigne la *i*ème réalisation au point \mathbf{x} et au temps t .

Les deux opérateurs de moyenne vérifient les propriétés suivantes :

- linéarité : $\langle av + u \rangle = a \langle v \rangle + \langle u \rangle$,
- idempotence : $\langle \langle v \rangle \rangle = \langle v \rangle$,
- dérivation commutative ($s = x, y, z$ ou t) : $\left\langle \frac{\partial v}{\partial s} \right\rangle = \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial s}$.

L'idempotence implique que la valeur moyenne de la fluctuation est nulle : $\langle v' \rangle = 0$.

5.2.2 Equation de Reynolds

Théorème 18. *La décomposition de Reynolds des champs de vitesse et de pression donne l'équation*

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} = \bar{F} + \nu \Delta \bar{v} - \text{div}(\overline{v' \otimes v'})}. \quad (5.1)$$

Démonstration. En utilisant la relation $\text{div}(v \otimes v) = v \cdot \nabla v + v \text{div}(v)$ dans le cas d'un fluide incompressible, l'équation de NS se réécrit

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{div}(v \otimes v) + \frac{1}{\rho} \nabla p = F + \nu \Delta v.$$

En décomposant la vitesse et la pression, nous aboutissons à

$$\frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial t} + \text{div}(\bar{v} \otimes \bar{v}) + \text{div}(\bar{v} \otimes v') + \text{div}(v' \otimes \bar{v}) + \text{div}(v' \otimes v') + \frac{1}{\rho} \nabla(\bar{p} + p') = F + \nu \Delta(\bar{v} + v') \quad (5.2)$$

En appliquant l'opérateur $\langle \rangle_s$ à (5.2) et compte-tenu des propriétés de cet opérateur, nous avons

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{div}(\bar{v} \otimes \bar{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} = \bar{F} + \nu \Delta \bar{v} - \text{div}(\overline{v' \otimes v'}),$$

car $\langle \text{div}(\bar{v} \otimes v') \rangle = \text{div}(\langle \bar{v} \otimes v' \rangle) = \text{div}(\bar{v} \otimes \langle v' \rangle) = 0$. La relation $\text{div}(v \otimes v) = v \cdot \nabla v + v \text{div}(v)$ permet de conclure. \square

Nous reconnaissons dans (5.1) l'équation de NS portant sur la vitesse et la pression moyennes avec un terme supplémentaire égal à l'opposée de la divergence du *tenseur de Reynolds* défini par

$$\boxed{R \stackrel{\text{def}}{=} \overline{v' \otimes v'}}.$$

Ce tenseur traduit les effets de la turbulence dans l'écoulement. L'équation (5.1) est communément appelée *URANS equation* pour *Unstationary Reynolds-Average Navier-Stokes equation*. L'énergie turbulente k [$J \cdot kg^{-1}$] est définie comme la moitié de la trace du tenseur de Reynolds :

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \text{Tr}(R) = \frac{1}{2} \overline{v' \cdot v'}.$$

5.2.3 Modèles de fermeture

Six inconnues supplémentaires, correspondant aux composantes du tenseur R , sont apparues dans l'équation de Reynolds de sorte qu'il est nécessaire d'introduire des relations additionnelles pour fermer le problème. L'idée la plus simple fut proposée par Boussinesq (hydraulicien français, 1842–1929) en 1877 et consiste à effectuer *une analogie entre la viscosité et la turbulence*. L'équation (5.1) se réécrit

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \text{div} \left(\frac{\bar{\sigma}}{\rho} - R \right) \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma} = 2\mu\bar{D} - \bar{p}I.$$

L'analogie entre le tenseur des contraintes et le tenseur de Reynolds s'écrit

$$-R = 2\nu_t\bar{D} + \alpha I,$$

où ν_t est la *viscosité turbulente* et α la *pression turbulente* déterminée grâce à l'incompressibilité :

$$\text{Tr}(\bar{D}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tr}(-R) = 3\alpha \quad \Rightarrow \quad -2k = 3\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{2}{3}k.$$

Le tenseur de Reynolds s'écrit finalement

$$\boxed{R = -2\nu_t\bar{D} + \frac{2}{3}kI.} \quad (5.3)$$

Bien qu'il y ait une analogie entre la viscosité et la turbulence, les viscosités cinématique et turbulente sont de nature différente : ν est constante puisqu'elle dépend du fluide alors que ν_t est variable puisqu'elle dépend de l'écoulement.

5.2.3.1 Modèle de longueur de mélange

Prandtl proposa en 1925 le *modèle de longueur de mélange* pour la viscosité turbulente dans un écoulement plan cisailé. Ce modèle est généralisable au cas tridimensionnel,

$$\nu_t = \begin{cases} l_m^2 \left| \frac{\partial v_x}{\partial z} \right| & \text{dans le cas plan cisailé,} \\ l_m^2 \sqrt{2D : D} & \text{dans le cas général,} \end{cases}$$

où l_m représente l'échelle de longueur des grandes structures turbulentes et $D : D$ le produit doublement contracté ($D : D$ est la somme des composantes au carré de D).

5.2.3.2 Modèle $k - \epsilon$

La viscosité turbulente est modélisée par la relation de Prandtl–Kolmogorov,

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon},$$

où ϵ désigne le taux de dissipation d'énergie défini ci-après et C_μ est un coefficient sans dimension. Ce modèle (dit « à deux équations ») nécessite de résoudre les équations déterminant k et ϵ pour obtenir ν_t . Les forces extérieures sont négligées et le tenseur de Reynolds est modélisé par (5.3). En soustrayant l'équation de Reynolds à celle de NS et en multipliant scalairement par la fluctuation de vitesse, nous obtenons

$$v' \cdot \frac{\partial v'}{\partial t} + v' \cdot \bar{v} \cdot \nabla v' + v' \cdot v' \cdot \nabla \bar{v} + v' \cdot v' \cdot \nabla v' + \frac{1}{\rho} v' \cdot \nabla p' = v' \cdot \text{div}(\nu_e \nabla v'), \quad (5.4)$$

où $\nu_e \stackrel{\text{def}}{=} \nu + \nu_t$ est la *viscosité effective*. En utilisant les quatre relations

$$\begin{aligned} v' \cdot \bar{v} \cdot \nabla v' &= \frac{\bar{v}}{2} \cdot \nabla(v' \cdot v'), & v' \cdot v' \cdot \nabla v' &= \frac{1}{2} \operatorname{div}(v' \cdot v' v') - v' \cdot v' \operatorname{div}(v'), \\ v' \cdot v' \cdot \nabla \bar{v} &= v' \otimes v' : \nabla \bar{v}, & v' \cdot \operatorname{div}(\nu_e \nabla v') &= \frac{1}{2} \operatorname{div}(\nu_e \nabla(v' \cdot v')) - \nu_e \nabla v' : \nabla v', \end{aligned}$$

et en appliquant l'opérateur de moyenne, l'équation (5.4) devient

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla k + R : \nabla \bar{v} + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\overline{v' \cdot v' v'}) + \frac{1}{\rho} \overline{v' \cdot \nabla p'} = \operatorname{div}(\nu_e \nabla k) - \nu_e \overline{(\nabla v' : \nabla v')}. \quad (5.5)$$

Le terme de compressibilité $\operatorname{div}(\nu_e \nabla k)$ est négligé devant le gradient de pression. Le terme de diffusion du membre de gauche est supposé proportionnel au gradient d'énergie turbulente, $\frac{1}{2} \overline{v' \cdot v' v'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_k} \nabla k$, où σ_k désigne le nombre turbulent de Prandtl. Ainsi, l'équation (5.5) se réécrit

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla k - \operatorname{div} \left(\left(\nu_e + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) = -(R : \nabla \bar{v} + \epsilon),$$

où nous avons introduit le *taux de dissipation d'énergie* $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \nu_e \overline{(\nabla v' : \nabla v')}$ qui est aussi modélisé par une équation de transport de la même forme,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \epsilon - \operatorname{div} \left(\left(\nu_e + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) = -\frac{\epsilon}{k} (C_{\epsilon 1} R : \nabla \bar{v} + C_{\epsilon 2} \epsilon).$$

Les constantes σ_ϵ , $C_{\epsilon 1}$ et $C_{\epsilon 2}$ sont des coefficients sans dimension. Les valeurs les plus couramment utilisées pour les constantes empiriques sont $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\epsilon = 1.2$, $C_{\epsilon 1} = 1.44$, $C_{\epsilon 2} = 1.92$ et $C_\mu = 0.09$. Notons que le modèle $k - \epsilon$ permet d'étudier correctement de nombreux écoulements mais qu'il n'est pas applicable près des parois où il est nécessaire d'introduire une loi de paroi.

5.2.4 Écoulement entre deux plans horizontaux

Nous reprenons l'écoulement de Poiseuille entre deux plans horizontaux étudié dans le chapitre précédent mais en considérant que le régime est turbulent et uniforme suivant la direction de l'écoulement. Nous rappelons les hypothèses simplificatrices :

1. écoulement dans le plan (O, x, z) ,
2. écoulement bidimensionnel,
3. écoulement turbulent et uniforme,
4. écoulement permanent,
5. forces de pesanteur négligeables,
6. fluide incompressible.

Compte-tenu de ces hypothèses, le champ de vitesse moyen \bar{v} a la même forme que le champ de vitesse v dans le cas laminaire, c'est-à-dire $\bar{v} = \bar{v}_x(z)e_x$. De plus, l'écoulement étant uniforme dans la direction x , les fluctuations turbulentes ne dépendent que de z de sorte que l'expression du champ de vitesse est

$$v = (\bar{v}_x(z) + v'_x(z))e_x + v'_z(z)e_z.$$

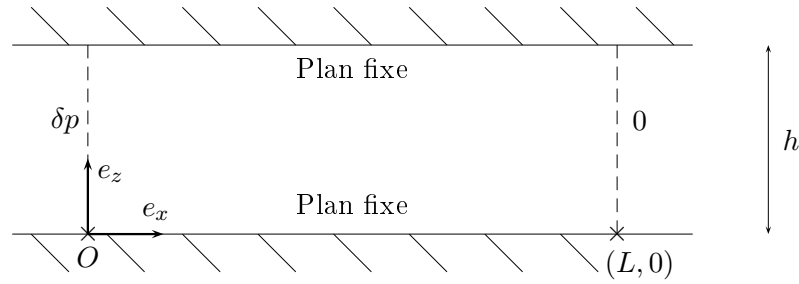


FIGURE 5.3 – Écoulement de Poiseuille entre deux plans horizontaux.

D'après ce résultat et en utilisant que l'écoulement est permanent et que les forces de pesanteur sont négligeables, les composantes de l'équation de Reynolds se réduisent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} - \frac{\partial \overline{v'_x v'_z}}{\partial z}, \end{array} \right. \quad (5.6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad (5.6b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{v'_z v'_z}}{\partial z}. \end{array} \right. \quad (5.6c)$$

Nous définissons la *pression modifiée* par $p_m \stackrel{\text{def}}{=} \bar{p} + \overline{\rho v'_z v'_z}$ qui est indépendante de y et z d'après les équations (5.6b) et (5.6c). L'hypothèse selon laquelle v'_z ne dépend que de z permet d'écrire

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial p_m}{\partial x} = \frac{dp_m}{dx}.$$

L'équation (5.6a) peut ainsi se réécrire

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp_m}{dx} = \frac{d}{dz} \left(\nu \frac{d\bar{v}_x}{dz} - \overline{v'_x v'_z} \right).$$

Le membre de gauche de cette équation ne dépend que de x alors que le membre de droite ne dépend que de z . Comme deux fonctions égales ne dépendant pas des mêmes variables ne peuvent être que constantes, nous en déduisons

$$\frac{d}{dz} \left(\nu \frac{d\bar{v}_x}{dz} - \overline{v'_x v'_z} \right) = a \quad \Rightarrow \quad \nu \frac{d\bar{v}_x}{dz} - \overline{v'_x v'_z} = az + b.$$

Pour déterminer les coefficients a et b , nous introduisons la contrainte totale τ_t qui vérifie

$$\frac{\tau_t}{\rho} = \nu \frac{d\bar{v}_x}{dz} - \overline{v'_x v'_z}. \quad (5.7)$$

Comme dans le cas d'un cylindre (cf. équation (4.8)), la contrainte τ_t est égale à la contrainte pariétale τ_p aux niveaux des parois et s'annule en $z = h/2$,

$$\left. \begin{array}{l} \tau_t(0) = \tau_p \Rightarrow b = \frac{\tau_p}{\rho} \\ \tau_t(h/2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -\frac{2\tau_p}{\rho h} \Rightarrow \tau_t = \tau_p \left| 1 - \frac{2z}{h} \right|.$$

L'hypothèse de viscosité turbulente $\overline{v'_x v'_z} = -\nu_t \frac{d\bar{v}_x}{dz}$ permet de réécrire l'équation (5.7),

$$\boxed{(\nu + \nu_t) \frac{d\bar{v}_x}{dz} = v_*^2 \left| 1 - \frac{2z}{h} \right|}, \quad (5.8)$$

où v_* désigne la vitesse de frottement. La résolution de cette équation change suivant l'importance des différents termes qui varie selon la position verticale considérée.

Zone linéaire ($0 < z < 11\nu/v_*$) Proche de la paroi, le terme turbulent est négligeable devant le terme visqueux et z est petit devant h de sorte que la simplification de l'équation (5.8) conduit à une solution linéaire,

$$\nu \frac{d\bar{v}_x}{dz} = v_*^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_x(z) = \bar{v}_{x,\text{lin}}(z) = \frac{v_*^2}{\nu} z.$$

Zone logarithmique ($11\nu/v_* < z < 0.1h$) Dans cette zone, le terme visqueux est négligeable devant le terme turbulent et z reste petit devant h . De plus, le modèle de longueur de mélange avec $l_m = Kz$, où $K = 0.41$ est la *constante de Karman*, donne $\nu_t = (Kz)^2 |d_z \bar{v}_x|$. La simplification de l'équation (5.8) conduit à une solution logarithmique,

$$\nu_t \frac{d\bar{v}_x}{dz} = v_*^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{v}_x}{dz} = \frac{v_*}{Kz} \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_x(z) = \bar{v}_{x,\text{log}}(z) = \frac{v_*}{K} (\ln(z) + C_1). \quad (5.9)$$

Pour déterminer C_1 , il faut raccorder le profil linéaire et le profil logarithmique au niveau de l'épaisseur de la sous-couche visqueuse δ :

$$\bar{v}_{x,\text{lin}}(\delta) = \bar{v}_{x,\text{log}}(\delta).$$

L'expérience montre que δ est proportionnelle à ν/v_* ,

$$\bar{v}_{x,\text{lin}}\left(n \frac{\nu}{v_*}\right) = \bar{v}_{x,\text{log}}\left(n \frac{\nu}{v_*}\right) \quad \Rightarrow \quad C_1 = Kn + \ln\left(\frac{v_*}{n\nu}\right).$$

En introduisant cette expression de C_1 dans l'équation (5.9), nous obtenons finalement le profil logarithmique suivant

$$\bar{v}_x(z) = v_* \left(\frac{1}{K} \ln\left(\frac{zv_*}{\nu}\right) + n - \frac{1}{K} \ln(n) \right) = \bar{v}_{x,\text{log}}(z) = v_* \left(\frac{1}{K} \ln\left(\frac{zv_*}{\nu}\right) + C \right),$$

où la constante $C = 5.2$ est déterminée expérimentalement.

Zone centrale ($0.1h < z < 0.5h$) Dans la zone centrale, le terme visqueux reste négligeable devant le terme turbulent et la viscosité turbulente est donnée par $\nu_t = (0.1Kh)^2 |d_z \bar{v}_x|$ ($l_m = 0.1Kh$). La simplification de l'équation (5.8) est

$$\nu_t \frac{d\bar{v}_x}{dz} = v_*^2 \left(1 - \frac{2z}{h}\right) \quad \Rightarrow \quad 0.1Kh \frac{d\bar{v}_x}{dz} = v_* \sqrt{\left(1 - \frac{2z}{h}\right)},$$

et le profil de vitesse est

$$\bar{v}_{x,\text{cent}}(z) = v_* \left(\frac{-1}{0.3K} \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^{3/2} + C_c \right),$$

dans lequel la constante C_c , qui est déterminée en raccordant ce profil au profil logarithmique en $z = 0.1h$, a pour expression

$$C_c = 11 + \frac{1}{K} \ln \left(\frac{0.1h v_*}{\nu} \right).$$

La figure 5.4 représente le profil de vitesse obtenu dans le cas turbulent ainsi que la comparaison avec le profil en régime laminaire pour une vitesse moyenne imposée égale à $1m \cdot s^{-1}$. Cette comparaison des profils amène aux remarques suivantes

- le profil turbulent est plus plat que le profil laminaire,
- le frottement pariétal est supérieur dans le cas turbulent,
- la vitesse maximale turbulente est plus faible que la vitesse maximale laminaire puisque

$$1.18 \simeq v_{\max}^{\text{tur}} < v_{\max}^{\text{lam}} = 1.5.$$

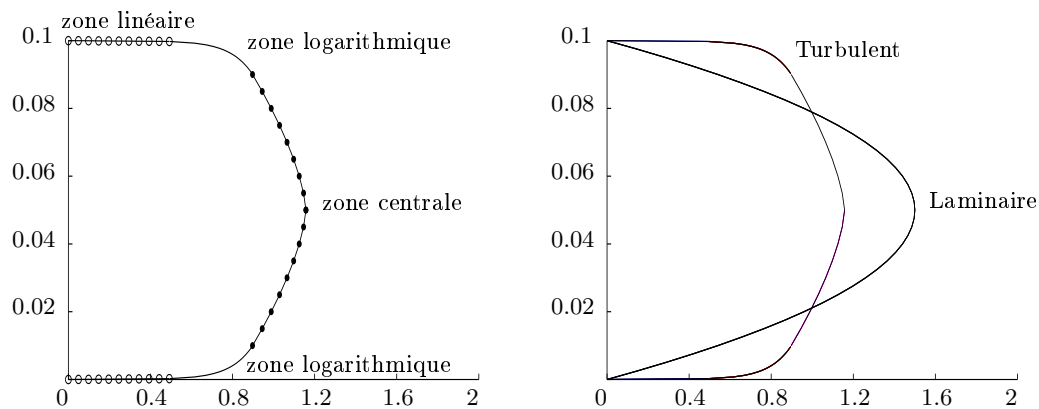


FIGURE 5.4 – Profil de vitesse en régime turbulent et comparaison avec le régime laminaire

Chapitre 6

Ecoulements à surface libre

Un écoulement possède une surface libre lorsqu'il est en contact avec l'atmosphère. C'est le cas par exemple des écoulements des fleuves, des rivières, des canaux et aussi des écoulements en conduite lorsque celle-ci n'est pas entièrement remplie. Dans ce type d'écoulement, l'interface entre le fluide et l'air est soumise à la pression atmosphérique et s'appelle la surface libre.

Deux parties composent ce chapitre. La première partie présente les équations de Saint–Venant qui sont employées pour décrire les écoulements à surface libre et qui sont obtenus à partir des équations de NS. La seconde partie expose quelques résultats concernant les écoulements permanents monodimensionnelles.

6.1 Equations de Saint–Venant

6.1.1 Cas bidimensionnel

La validité des équations de Saint–Venant (ingénieur français, 1797–1886) concerne les écoulements quasi-horizontaux en eau peu profonde et les hypothèses de ce modèle sont 1) l'écoulement est quasi-horizontale, 2) la pression est hydrostatique, 3) la vitesse du fond est nulle et 4) la cote du fond ne dépend pas du temps. La première hypothèse implique que la composante verticale de la vitesse est faible devant les composantes horizontales et une moyenne selon la verticale de l'équation de NS (ou de Reynolds) est effectuée de sorte que le champ de vitesse inconnu \mathbf{v} est désormais défini par

$$\mathbf{v} = \langle v \rangle_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{h} \int_{z_f}^{\eta} v dz, \quad (6.1)$$

où h est la hauteur d'eau dans l'écoulement, z_f est la cote du fond et $\eta \stackrel{\text{def}}{=} z_f + h$ désigne la cote de la surface libre comme l'illustre la figure 6.1. En supposant la pression nulle au niveau de la surface libre, la deuxième hypothèse s'écrit

$$p = \rho g(\eta - z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (6.2)$$

Les deux dernières hypothèses se traduisent simplement par

$$v(x, y, z_f) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial z_f(x, y)}{\partial t} = 0. \quad (6.3)$$

La surface libre est donnée par la relation $z = \eta(x, y, t)$ de sorte que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \eta}{\partial y} - v_z = 0. \quad (6.4)$$

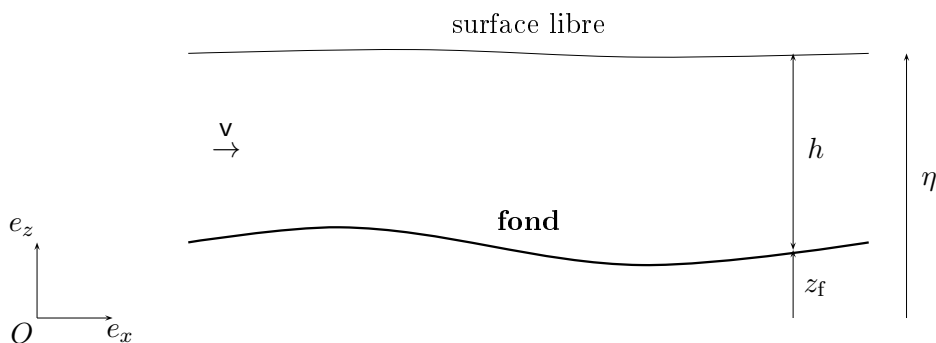


FIGURE 6.1 – Notations concernant les équations de Saint-Venant.

Comme pour l'approche statistique des écoulements turbulents, le champ de vitesse v est décomposé en un champ moyen noté \mathbf{v} ou $\langle v \rangle_z$ et un champ fluctuant noté v'' et traduisant la dispersion verticale :

$$v(\mathbf{x}, t) = \langle v(\mathbf{x}, t) \rangle_z + v''(\mathbf{x}, t).$$

Théorème 19. *Compte-tenu des hypothèses, la conservation de la masse s'écrit*

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(h\mathbf{v}) = 0.$$

Démonstration. En appliquant l'opérateur de moyenne suivant la verticale à l'équation de continuité et en multipliant par h , nous obtenons l'équation

$$h \left\langle \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\rangle_z = 0. \quad (6.5)$$

Le théorème de Leibniz (cf. section B.1) donne

$$\frac{d}{dx} \int_{z_f}^{\eta} v_x dz = \int_{z_f}^{\eta} \frac{\partial v_x}{\partial x} dz + \frac{\partial \eta}{\partial x} v_x(x, \eta(x)) - \frac{\partial z_f}{\partial x} v_x(x, z_f(x)).$$

La vitesse du fond étant supposée nulle, l'équation précédente se réécrit compte-tenu de (6.3)¹,

$$h \left\langle \frac{\partial v_x}{\partial x} \right\rangle_z = \frac{\partial h v_x}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} v_x(\eta). \quad (6.6)$$

De même, pour la seconde composante horizontale, nous avons l'égalité

$$h \left\langle \frac{\partial v_y}{\partial y} \right\rangle_z = \frac{\partial h v_y}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} v_y(\eta). \quad (6.7)$$

La composante verticale est immédiate

$$h \left\langle \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\rangle_z = v_z(\eta). \quad (6.8)$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur $\langle \cdot \rangle_z$ et les relations (6.6) à (6.8) dans (6.5), nous obtenons

$$\frac{\partial h v_x}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} v_x(\eta) + \frac{\partial h v_y}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} v_y(\eta) + v_z(\eta) = 0.$$

La relation (6.4) et l'hypothèse 4) terminent la preuve. \square

1. Pour alléger les notations, nous écrivons simplement $v_x(\eta)$ au lieu de $v_x(x, \eta(x))$

Théorème 20. *Compte-tenu des hypothèses, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit*

$$\frac{\partial h\mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + hg\nabla h = -hg\nabla z_f + \mathbf{F} + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_f + \nu_e \Delta(h\mathbf{v}),$$

où \mathbf{F} désigne la moyenne selon la verticale des forces extérieures (la force de Coriolis par exemple) et ν_e désigne la viscosité effective prenant en compte les effets visqueux et de dispersion verticale (et éventuellement de turbulence).

Démonstration. En appliquant l'opérateur de moyenne suivant la verticale à la première composante de l'équation de NS dans laquelle la pression est supposée hydrostatique et en multipliant par h , nous obtenons l'équation

$$h \left\langle \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x v_z}{\partial z} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\rangle_z = h \left\langle F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right\rangle_z \quad (6.9)$$

Nous allons maintenant exprimer l'ensemble des termes de cette équation. Comme la vitesse du fond est nulle, le théorème de Leibniz donne

$$h \left\langle \frac{\partial v_x}{\partial t} \right\rangle_z = \frac{\partial h v_x}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} v_x(\eta), \quad (6.10)$$

$$h \left\langle \frac{\partial v_x v_x}{\partial x} \right\rangle_z = \frac{\partial h \langle v_x v_x \rangle_z}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} v_x^2(\eta), \quad (6.11)$$

$$h \left\langle \frac{\partial v_x v_y}{\partial y} \right\rangle_z = \frac{\partial h \langle v_x v_y \rangle_z}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} v_x v_y(\eta). \quad (6.12)$$

L'intégration du terme de pression est immédiat

$$h \left\langle g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\rangle_z = hg \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (6.13)$$

Le théorème de Leibniz appliqué aux composantes horizontales des contraintes s'écrit

$$h \left\langle \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right\rangle_z = \frac{\partial \langle h \tau_{xx} \rangle_z}{\partial x} - \tau_{xx}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tau_{xx}(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x}, \quad (6.14)$$

$$h \left\langle \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right\rangle_z = \frac{\partial \langle h \tau_{xy} \rangle_z}{\partial y} - \tau_{xy}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \tau_{xy}(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y}. \quad (6.15)$$

La moyenne verticale des deux termes ayant une dérivée selon z est immédiate

$$h \left\langle \frac{\partial v_x v_z}{\partial z} \right\rangle_z = v_x v_z(\eta) \quad \text{et} \quad h \left\langle \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right\rangle_z = \tau_{xz}(\eta) - \tau_{xz}(z_f). \quad (6.16)$$

En utilisant la relation (6.4) ainsi que les égalités

$$\langle v_x^2 \rangle_z = v_x^2 + \langle v_x''^2 \rangle_z \quad \text{et} \quad \langle v_x v_y \rangle_z = v_x v_y + \langle v_x'' v_y'' \rangle_z,$$

les relations (6.10) à (6.16) dans l'équation (6.9) donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial h v_x}{\partial t} + \frac{\partial h v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial h v_x v_y}{\partial y} + hg \frac{\partial \eta}{\partial x} &= h \langle F_x \rangle_z + \mathbf{F}_{s,x} + \mathbf{F}_{f,x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \langle h \tau_{xx} \rangle_z - h \langle v_x''^2 \rangle_z \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \langle h \tau_{xy} \rangle_z - h \langle v_x'' v_y'' \rangle_z \right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

où $F_{s,x}$ et $F_{f,x}$ désignent les termes de frottement au niveau de la surface libre et au niveau du fond définis par

$$F_{s,x} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\rho} \left(\tau_{xx}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tau_{xy}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} - \tau_{xz}(\eta) \right) \quad \text{et} \quad F_{f,x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho} \left(\tau_{xx}(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} + \tau_{xy}(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} - \tau_{xz}(z_f) \right).$$

En utilisant la relation $\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z_f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x}$ et en supposant que

$$\frac{1}{\rho} \langle h \tau_{xx} \rangle_z - h \langle v_x'' \rangle_z \simeq \nu_e \frac{\partial h v_x}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} \langle h \tau_{xy} \rangle_z - h \langle v_x'' v_y'' \rangle_z \simeq \nu_e \frac{\partial h v_x}{\partial y},$$

l'équation (6.17) devient

$$\frac{\partial h v_x}{\partial t} + \frac{\partial h v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial h v_x v_y}{\partial y} + h g \frac{\partial h}{\partial x} = -h g \frac{\partial z_f}{\partial x} + F_x + F_{s,x} + F_{f,x} + \nu_e \Delta(h v_x).$$

De même pour la seconde composante, nous avons

$$\frac{\partial h v_y}{\partial t} + \frac{\partial h v_y v_x}{\partial x} + \frac{\partial h v_y^2}{\partial y} + h g \frac{\partial h}{\partial y} = -h g \frac{\partial z_f}{\partial y} + F_y + F_{s,y} + F_{f,y} + \nu_e \Delta(h v_y).$$

□

Contrairement à l'équation de NS dans laquelle les quatre inconnues sont les trois composantes de la vitesse v et la pression p , les inconnues des équations de Saint-Venant sont la hauteur d'eau h et les deux composantes horizontales de la vitesse \mathbf{v} .

6.1.2 Linéarisation

Nous considérons maintenant un écoulement sur un fond horizontal et négligeons les forces extérieures, le frottement (sur le fond et à la surface) ainsi que la dispersion. Nous souhaitons linéariser les équations de Saint-Venant autour d'une hauteur d'eau moyenne h_0 . La linéarisation de l'équation de continuité s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} + h_0 \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (6.18)$$

La linéarisation de l'équation d'équilibre s'obtient en négligeant le terme advectif qui est non linéaire,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -g \nabla h \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial y}. \end{cases} \quad (6.19a)$$

$$(6.19b)$$

En dérivant (6.18) par rapport à t , (6.19a) par rapport à x , (6.19b) par rapport à y et en combinant les équations obtenues, nous obtenons l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - g h_0 \Delta h = 0,$$

dans laquelle la vitesse de propagation est $\sqrt{g h_0}$. Ce résultat permet d'interpréter le nombre de Froude $F_r = \mathbf{v}(gh)^{-\frac{1}{2}}$ (défini au chapitre 4) comme le rapport de la vitesse du fluide sur la vitesse des ondes se propageant à la surface du fluide. Nous utiliserons cette interprétation à la fin de la section 6.2.2.

6.1.3 Cas monodimensionnel

Pour la représentation des écoulements dans les canaux de grande longueur et lorsque les détails de l'écoulement dans une section transversale ne sont pas significatifs, on utilise une restriction à une seule dimension d'espace en effectuant une moyenne suivant la *section mouillée* S (section de fluide dans la direction perpendiculaire à celle de l'écoulement). Dans ce cas, l'opérateur de moyenne s'écrit

$$\mathbf{v} = \langle v_x \rangle_S \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{S} \int_S v ds.$$

En appliquant cet opérateur aux équations de continuité et de NS, nous obtenons des équations régissant l'écoulement monodimensionnel.

Théorème 21. *Compte-tenu des hypothèses, la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement s'écrivent*

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} = 0, & (6.20a) \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial hv^2}{\partial x} + hg \frac{\partial h}{\partial x} = -hg \frac{\partial z_f}{\partial x} + \frac{h}{S} (\mathbf{F} + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_f + \nu_e \Delta(hv)), & (6.20b) \end{cases}$$

où \mathbf{F}_f désigne ici le frottement sur le fond et les berges.

6.1.4 Onde cinématique

L'équation (6.20b) peut être considérablement simplifiée en considérant simplement l'équilibre entre la pente et les frottements sur le fond,

$$g \frac{\partial z_f}{\partial x} = \frac{\mathbf{F}_f}{S} \quad \Leftrightarrow \quad I = J,$$

où $I \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial z_f}{\partial x}$ a un rôle moteur alors que $J \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\mathbf{F}_f}{gS}$ freine l'écoulement. Comme nous le verrons à la section 6.2.1, l'équilibre entre la pente et les frottements permet d'obtenir la formule de Manning–Strickler dont la version monodimensionnelle est

$$\mathbf{v} = \mathcal{K}_s h^{2/3} \sqrt{I},$$

où $\mathcal{K}_s [m^{1/3} \cdot s^{-1}]$ s'appelle le coefficient de Strickler. En introduisant cette expression de la vitesse dans l'équation de continuité (6.20a), nous obtenons *l'approximation de l'onde cinématique*

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{q}(h, I)}{\partial x} = 0}, \quad (6.21)$$

dans laquelle le débit est défini par $\mathbf{q}(h, I) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{K}_s h^{5/3} \sqrt{I}$. La hauteur d'eau est donc la seule inconnue de cette équation de transport non linéaire qui peut être résolue par la méthode des caractéristiques (qui sort du cadre de ce cours).

6.2 Ecoulements permanents monodimensionnels

Si l'on considère un écoulement permanent dans lequel les forces extérieures, le terme de diffusion et le frottement au niveau de la surface libre sont négligés, l'équation (6.20b) peut se réécrire

$$\frac{1}{2g} \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = I - J.$$

La *charge spécifique* \tilde{H}_s est définie comme la somme du terme cinétique et du terme potentiel

$$\tilde{H}_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v^2}{2g} + h,$$

de sorte que l'équation précédente peut s'écrire

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial x} = I - J.} \quad (6.22)$$

6.2.1 Formules de frottement

Nous considérons un écoulement permanent de pente constante faible ayant une profondeur, une section mouillée et une vitesse moyenne constante. Nous supposons que la force de frottement F du fond s'équilibre avec la composante longitudinale de la gravité et que la contrainte de frottement du fond est proportionnelle au carré de la vitesse moyenne ($\tau_p = kv^2$ où k est un coefficient). Le *perimètre mouillé* P désigne la longueur curviligne de la courbe située entre le lit (espace topographique dans lequel la rivière s'écoule) de la rivière et l'eau comme représenté sur la figure 6.2. Nous définissons aussi le *miroir* l comme la largeur du cours d'eau au niveau de la surface libre et le *diamètre hydraulique* D_h comme la hauteur d'eau moyenne dans l'écoulement.



FIGURE 6.2 – Ecoulement permanent uniforme avec pente constante.

L'équilibre entre la force de frottement F_f et la gravité F_g ainsi que la relation entre la contrainte et la vitesse permet d'obtenir une estimation de la vitesse suivant les différents paramètres :

$$\left. \begin{array}{l} F_g = mg \sin(I) \\ F_f = kv^2 PL \end{array} \right\} \Rightarrow mgI \simeq kv^2 PL \Rightarrow v \simeq \sqrt{\frac{\rho g}{k}} \sqrt{\frac{SI}{P}}.$$

La *Formule de Chézy* (hydrologue français, 1718–1798) s'écrit

$$\boxed{v = C \sqrt{R_h I},}$$

où $C = \sqrt{\frac{\rho g}{k}}$ désigne le coefficient de Chézy et $R_h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S}{P}$ s'appelle le *rayon hydraulique*.

Le coefficient C dépend de la rugosité des parois, du rayon hydraulique et de la pente du fond. Plusieurs formules existent pour estimer ce coefficient comme les formules de Bazin (hydrologue français, 1829–1917) et de Manning (ingénieur irlandais, 1816–1897) :

$$\text{Formule de Bazin : } C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_h}}} \quad \text{et} \quad \text{Formule de Manning : } C = \frac{1}{n} R_h^{\frac{1}{6}},$$

dans lesquelles m et n sont des coefficients empiriques variant suivant la nature du sol. Le regroupement des formules de Chézy et de Manning donnent la *formule de Manning–Strickler* :

$$v = \mathcal{K}_s R_h^{2/3} \sqrt{I},$$

où le coefficient de Strickler $\mathcal{K}_s = n^{-1}$. Comme le coefficient de Chézy, ce coefficient diminue lorsque le frottement augmente. Quelques valeurs sont indiquées dans le tableau 6.1.

Nature du sol	$\mathcal{K}_s [m^{1/3} \cdot s^{-1}]$
Béton lisse	75 – 90
Canal en terre	50 – 60
Rivière en plaine	30 – 40
Lit majeur	10 – 20

TABLE 6.1 – Ordre de grandeur du coefficient de Strickler.

Les formules de Chézy et de Manning–Strickler sont souvent employées pour estimer le frottement sur le lit d’une rivière ou d’un canal mais il existe d’autres formules (comme celles de Darcy–Weisbach ou de Coulomb) dont le choix dépend du processus physique que l’on souhaite représenter.

6.2.2 Hauteur critique

La charge spécifique \tilde{H}_s peut s’écrire en fonction du débit Q et de la surface mouillée S :

$$\tilde{H}_s = \frac{Q^2}{2gS^2} + h.$$

6.2.2.1 Minimisation de la charge

On suppose tout d’abord que le débit Q est constant. Le terme cinétique de la charge spécifique étant une fonction décroissante de la hauteur d’eau (car S^{-2} diminue si h augmente), celle-ci présente un minimum puisque le terme potentiel est une fonction croissante suivant la hauteur d’eau. La dérivée de la charge spécifique par rapport à la hauteur d’eau est

$$\frac{d\tilde{H}_s}{dh} = 1 - \frac{Q^2}{gS^3} \frac{dS}{dh}. \quad (6.23)$$

En utilisant que $dS = l dh$, on obtient

$$\frac{d\tilde{H}_s}{dh} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q^2 l = gS^3}$$

6.2.2.2 Maximisation du débit

On suppose que la charge spécifique est constante et l'on en déduit la dérivée du débit au carré suivant la hauteur h :

$$Q^2 = 2gS^2(\tilde{H}_s - h) \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ^2}{dh} = 4gS \frac{dS}{dh}(\tilde{H}_s - h) - 2gS^2.$$

En utilisant que $dS = ldh$ et en multipliant par $\frac{S}{2}$, on obtient

$$\frac{dQ^2}{dh} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q^2 l = gS^3}$$

La hauteur d'eau notée h_c qui minimise la charge spécifique à débit donné et qui maximise le débit à charge spécifique constante (c'est-à-dire qui vérifie $Q^2 l = gS^3$) s'appelle *la hauteur critique*. La vitesse, le débit et la charge associés à cette hauteur s'appellent respectivement *la vitesse critique*, *le débit critique* et *la charge critique*. Nous illustrons ces notions par un exemple sur un canal rectangulaire de largeur $2m$. L'image gauche de la figure 6.3 représente pour un débit unitaire, le terme potentiel en trait discontinu, le terme cinétique en pointillé et la charge spécifique en trait continu en fonction de la hauteur d'eau. Dans cet exemple, la hauteur critique est 0.29 et la charge critique \tilde{H}_c est 0.44. L'image droite représente la variation du débit en fonction de la hauteur d'eau quand la charge spécifique est égale à la charge critique. Comme attendu, le débit maximal vaut 1.

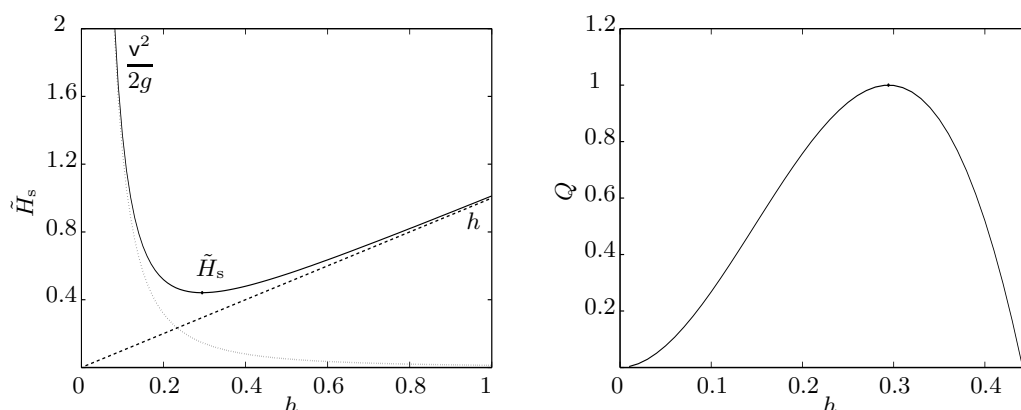


FIGURE 6.3 – Minimisation de la charge et maximisation du débit.

On montre facilement que l'écoulement critique correspond à un nombre de Froude unitaire :

$$Q^2 l = gS^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2 l}{gS} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{gD_h} = F_r^2 = 1, \quad \text{avec} \quad D_h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S}{l}.$$

La valeur du nombre de Froude permet une classification de l'écoulement :

- le régime *fluvial* est tel que $F_r < 1$ ($h_c < D_h$),
- le régime *critique* est tel que $F_r = 1$ ($h_c = D_h$),
- le régime *torrentiel* est tel que $F_r > 1$ ($h_c > D_h$).

Un écoulement fluvial a une vitesse faible et une hauteur d'eau importante alors qu'un écoulement torrentiel a une vitesse importante et hauteur d'eau faible. Dans un écoulement de hauteur d'eau h les ondes se propageant à la surface du fluide ont une vitesse égale à \sqrt{gh} de sorte que ces ondes peuvent remonter l'écoulement dans le cas fluvial alors qu'elles suivent l'écoulement dans le cas torrentiel.

6.2.3 Hauteur normale

Les équations (6.22) et (6.23) permettent d'obtenir la variation de la hauteur d'eau suivant x :

$$\frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = I - J \quad \text{et} \quad \frac{d\tilde{H}_s}{dh} = 1 - \frac{Q^2 l}{gS^3} = 1 - F_r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{I - J}{1 - F_r^2}}$$

La *hauteur normale* h_n est la hauteur correspondant au régime uniforme qui est équivalent à l'équilibre entre la gravité et le frottement d'après l'équation précédente :

$$\frac{dh}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{I = J}$$

6.2.4 Ecoulements graduellement variés

On appelle *lignes d'eau* les surfaces libres vérifiant l'équation

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I - J}{1 - F_r^2}. \quad (6.24)$$

Pour connaître le signe du second membre de cette équation en fonction de la hauteur d'eau, nous utilisons les relations suivantes concernant la hauteur critique,

$$h < h_c \Rightarrow F_r > 1, \quad h > h_c \Rightarrow F_r < 1 \quad \text{et} \quad h = h_c \Rightarrow F_r = 1,$$

et les relations suivantes concernant la hauteur normale,

$$h < h_n \Rightarrow I < J, \quad h > h_n \Rightarrow I > J \quad \text{et} \quad h = h_n \Rightarrow I = J.$$

Deux situations sont à distinguer : lorsque la hauteur normale est supérieure à la hauteur critique, il s'agit des *canaux à faibles pentes* ($h_n > h_c$) et lorsque la hauteur critique est supérieure à la hauteur normale, il s'agit des *canaux à fortes pentes* ($h_c > h_n$). Le signe de $I - J$ et le signe de $1 - F_r^2$ suivant la valeur de la hauteur d'eau permettent d'en déduire le signe de la dérivée de h par rapport à x . Ces éléments sont indiqués dans le tableau 6.2 où le type de courbe \mathcal{C} obtenu est représenté sur les figures (6.4) et (6.5) dans le cas du canal rectangulaire présenté ci-dessous.

h	0	h_c	h_n	∞	
$I - J$	-	-	0	+	I
$1 - F_r^2$	-	0	+	+	1
$\frac{dh}{dx}$	+	∞	-	0	+
\mathcal{C}	M_1	M_2	M_3		

h	0	h_n	h_c	∞	
$I - J$	-	0	+	+	I
$1 - F_r^2$	-	-	0	+	1
$\frac{dh}{dx}$	+	0	-	∞	+
\mathcal{C}	M_4	M_5	M_6		

TABLE 6.2 – Canaux à faibles pentes (gauche) et canaux à fortes pentes (droite).

Nous terminons par le tracé des lignes d'eau en résolvant, par une méthode d'Euler explicite, l'équation (6.24) dans le cas d'un canal de section rectangulaire de grande largeur l . Dans ce cas particulier, les hauteurs critique et normale sont

$$h_c = \left(\frac{Q^2}{gl^2} \right)^{1/3} \quad \text{et} \quad h_n = \left(\frac{Q}{lK_s\sqrt{I}} \right)^{3/5}.$$

Nous choisissons un débit par unité de largeur de $20m^2 \cdot s^{-1}$ et un coefficient de Strickler de $20m^{1/3} \cdot s^{-1}$ ce qui donne une hauteur critique de $3.42m$. Les deux pentes $I = 7.10^{-4}$ et $I = 0.15$ sont considérées. La première correspond au cas du canal à faible pente alors que la seconde correspond au cas du canal à forte pente :

$$I = 7.10^{-4} \Rightarrow h_n = 8.84m \Rightarrow h_n > h_c, \quad \text{et} \quad I = 0.15 \Rightarrow h_n = 1.76m \Rightarrow h_n < h_c.$$

Les courbes tracées sur les figures (6.4) et (6.5) confirment les résultats du tableau 6.2. Dans le cas de la faible pente, lorsque la hauteur d'eau est inférieure à la hauteur critique², elle tend vers zéro à l'amont et tend vers la hauteur critique à l'aval. Lorsque la hauteur d'eau est comprise entre les hauteurs critique et normale, elle tend vers la hauteur normale à l'amont et tend vers la hauteur critique à l'aval. Lorsque la hauteur d'eau est supérieure à la hauteur normale, elle tend vers la hauteur normale à l'amont et tend vers l'horizontale à l'aval.

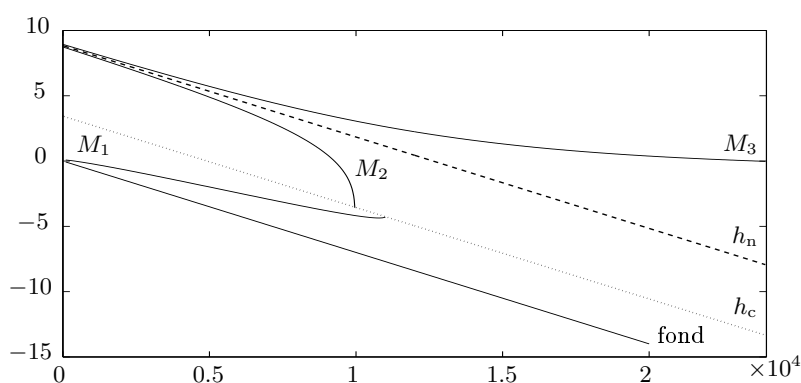


FIGURE 6.4 – Allure des lignes d'eau – canal à faible pente.

Dans le cas de la forte pente, lorsque la hauteur d'eau est inférieure à la hauteur normale, elle tend vers zéro à l'amont et tend vers la hauteur normale à l'aval. Lorsque la hauteur d'eau est comprise entre les hauteurs normale et critique, elle tend vers la hauteur critique à l'amont et tend vers la hauteur normale à l'aval. Lorsque la hauteur d'eau est supérieure à la hauteur critique, elle tend vers la hauteur critique à l'amont et tend vers l'horizontale à l'aval.

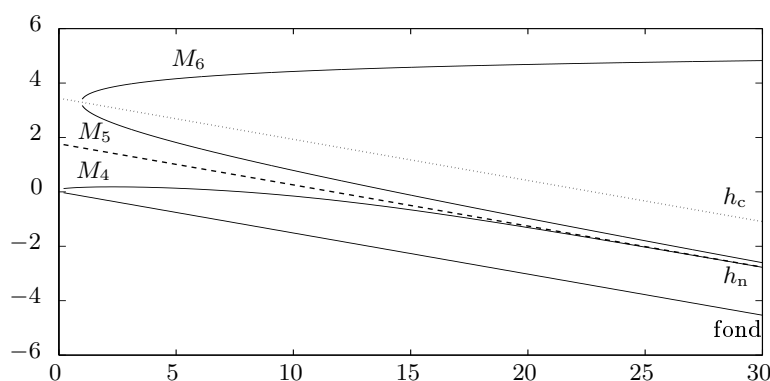


FIGURE 6.5 – Allure des lignes d'eau – canal à forte pente.

Comme attendu dans les deux cas, la tangente à la hauteur d'eau est verticale quand la hauteur d'eau tend vers la hauteur critique et la tangente est horizontale quand la hauteur d'eau tend vers la hauteur normale.

2. l'abscisse est ici multipliée par 100 pour obtenir un profil comparable à ceux obtenus dans les deux autres configurations : $h_c < h < h_n$ et $h_n < h$.

Annexe A

Rappels de mathématiques et de physique

Les opérateurs différentiels sont essentiels puisqu'ils sont utilisés dans la modélisation de nombreux domaines de la physique (comme la mécanique des fluides, la mécanique des solides, la thermique, l'électromagnétisme, l'acoustique, ...) *via* des équations aux dérivées partielles. Ces opérateurs sont notamment employés en mécanique des milieux continus qui se place à l'échelle macroscopique et suppose que la différentiabilité mathématique est applicable. Nous rappelons la définition de chaque opérateur en coordonnées cartésiennes (employées dans la majeure partie du cours) ainsi que son interprétations physique. Une section est également dédiée aux forces conservatives.

A.1 Champs et opérations

L'espace physique est représenté par l'espace euclidien à trois dimensions \mathbb{R}^3 dont les vecteurs e_x, e_y et e_z définis par

$$e_x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_z \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

forment une base orthonormale directe. Un point de \mathbb{R}^3 est ainsi repéré par ses trois coordonnées cartésiennes¹ x, y et z . Soit Ω un domaine volumique de \mathbb{R}^3 . Les différentes grandeurs physiques sont mathématiquement représentées par trois types de champ :

— des *champs scalaires* $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow f,$$

— des *champs vectoriels* $F : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$,

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix},$$

— des *champs tensoriels* $T : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$,

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}.$$

1. la généralisation aux autres systèmes de coordonnées ne pose aucune difficulté

Par exemple, la masse volumique, la pression et la température sont des champs scalaires ; le déplacement, la vitesse et l'accélération sont des champs vectoriels ; les contraintes et les déformations sont des champs tensoriels. Par convention, un scalaire est un tenseur d'ordre 0, un vecteur est un tenseur d'ordre 1 et une matrice est un tenseur d'ordre 2. Néanmoins, par abus de langage, un tenseur désignera désormais une matrice.

Soient u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^3 de composantes respectives u_x, u_y, u_z et v_x, v_y, v_z . Trois opérations sont définies sur ces vecteurs :

- le produit scalaire noté \cdot : $(u \cdot v) \stackrel{\text{def}}{=} u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$,
- le produit vectoriel noté \wedge : $(u \wedge v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$,
- le produit tensoriel noté \otimes : $(u \otimes v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} u_x v_x & u_x v_y & u_x v_z \\ u_y v_x & u_y v_y & u_y v_z \\ u_z v_x & u_z v_y & u_z v_z \end{pmatrix} = uv^\top$,

où v^\top désigne la transposée du vecteur v .

A.2 Opérateurs différentiels

A.2.1 Gradient

Cet opérateur est noté *grad* ou ∇ . Le gradient d'un champ scalaire f et le gradient d'un champ vectoriel F sont définis respectivement par le vecteur et le tenseur suivant

$$\nabla f \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla F \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla^\top f_x \\ \nabla^\top f_y \\ \nabla^\top f_z \end{pmatrix}.$$

Propriété 10. *Le gradient accroît d'un degré la tensorialité de la grandeur à laquelle on l'applique.*

Le gradient est une extension de la dérivée classique à une fonction de plusieurs variables et indique la façon dont varie la fonction dans l'espace. Les flèches de la figure A.1 représentent le gradient de la couleur la plus foncée vers la couleur la plus claire pour un champ constant suivant la direction verticale et un champ radial.

A.2.2 Divergence

Cet opérateur est noté *div* ou $\nabla \cdot$. La divergence d'un champ vectoriel F et la divergence d'un champ tensoriel T sont définies respectivement par le scalaire et le vecteur suivant

$$\text{div}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad \text{et} \quad \text{div}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{div}(T_x) \\ \text{div}(T_y) \\ \text{div}(T_z) \end{pmatrix},$$

où T_x , T_y et T_z sont les différentes lignes de T .

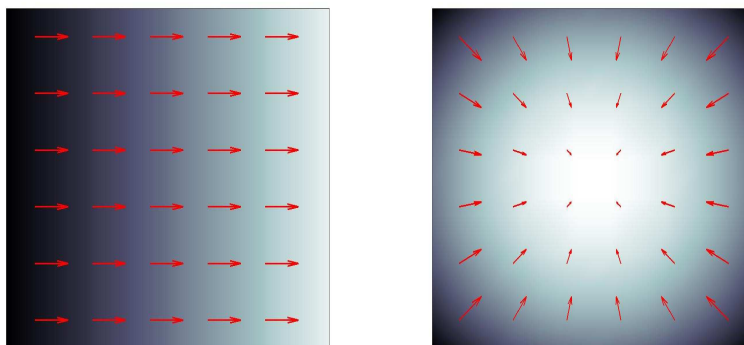
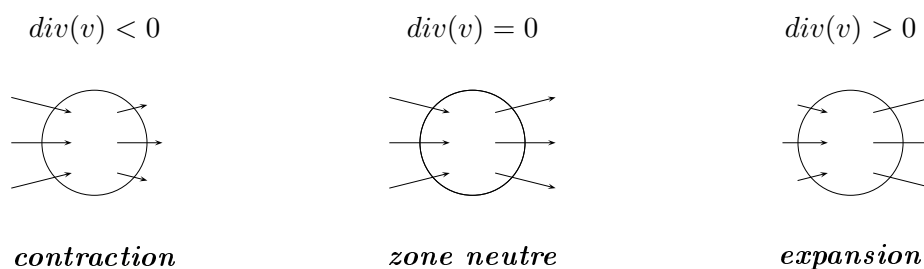


FIGURE A.1 – Exemples de gradient de champs scalaires plans.

Propriété 11. *La divergence baisse d'un degré la tensorialité de la grandeur à laquelle on l'applique.*

La divergence de la vitesse mesure l'intensité des dilatations au sein du fluide qui sont positives en cas d'expansion et négatives en cas de contraction comme l'illustre la figure A.2.

FIGURE A.2 – Types de variations locales dans un fluide selon le signe de $div(v)$.

Le *flux* φ d'un champ F (vectoriel ou tensoriel) à travers une surface \mathcal{S} de normale extérieure unitaire n est défini par

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{S}} F n \, dS.$$

La divergence est liée à la notion de flux par le théorème de Gauss (mathématicien allemand, 1777–1855) qui est aussi appelé formule d'Ostrogradsky (mathématicien russe, 1801–1862). Ce théorème indique que la divergence d'un champ à l'intérieur d'un volume est égale au flux qui traverse la surface délimitant ce volume :

Théorème de Gauss. *Soient F un champ (vectoriel ou tensoriel) et \mathcal{V} un volume délimité par une frontière fermée $\partial\mathcal{V}$, alors*

$$\int_{\mathcal{V}} div(F) \, dV = \int_{\partial\mathcal{V}} F n \, dS,$$

où n est la normale extérieure unitaire à \mathcal{V} .

A.2.3 Rotationnel

Cet opérateur est noté rot ou $\nabla \wedge$ et le rotationnel d'un champ vectoriel F est défini par

$$rot(F) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Propriété 12. *Le rotationnel ne s'applique qu'à un champ vectoriel et donne un champ vectoriel.*

La *circulation* Γ d'un champ vectoriel F le long d'une courbe fermée \mathcal{C} de tangente unitaire t est définie par

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\mathcal{C}} F \cdot t \, dl.$$

Le rotationnel est lié à la notion de circulation par le théorème de Stokes qui indique que le flux du rotationnel d'un champ à travers une surface fermée est égal à la circulation de ce champ le long de la ligne délimitant cette surface :

Théorème de Stokes. *Soient F un champ vectoriel et \mathcal{S} une surface fermée de frontière $\partial\mathcal{S}$, alors*

$$\boxed{\int_{\mathcal{S}} rot(F) \cdot n \, dS = \oint_{\partial\mathcal{S}} F \cdot t \, dl,}$$

où n est la normale extérieure unitaire à \mathcal{S} et t la tangente unitaire à $\partial\mathcal{S}$.

Parmi les quatre champs vectoriels représentés à la figure A.3, deux ont une divergence nulle et deux ont un rotationnel nul :

- v_1 vérifie $div(v_1) = 0$ et $rot(v_1) = 0$, ce champ est unidirectionnel ($v_x = \text{cste}, v_y = 0$),
- v_2 vérifie $div(v_2) \neq 0$ et $rot(v_2) = 0$, ce champ est radial ($v_x = x, v_y = y$),
- v_3 vérifie $div(v_3) = 0$ et $rot(v_3) \neq 0$, ce champ est orthoradial ($v_x = -y, v_y = x$),
- v_4 vérifie $div(v_4) \neq 0$ et $rot(v_4) \neq 0$, ($v_x = x - y, v_y = x$).

A.2.4 Laplacien

Cet opérateur de diffusion est noté Δ . Son nom est associé au mathématicien et physicien français Laplace (1749–1827). Le laplacien d'un champ scalaire f et le laplacien d'un champ vectoriel F sont définis par

$$\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{et} \quad \Delta F \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \\ \Delta f_z \end{pmatrix}.$$

Propriété 13. *Le laplacien garde le degré de tensorialité de la grandeur à laquelle on l'applique.*

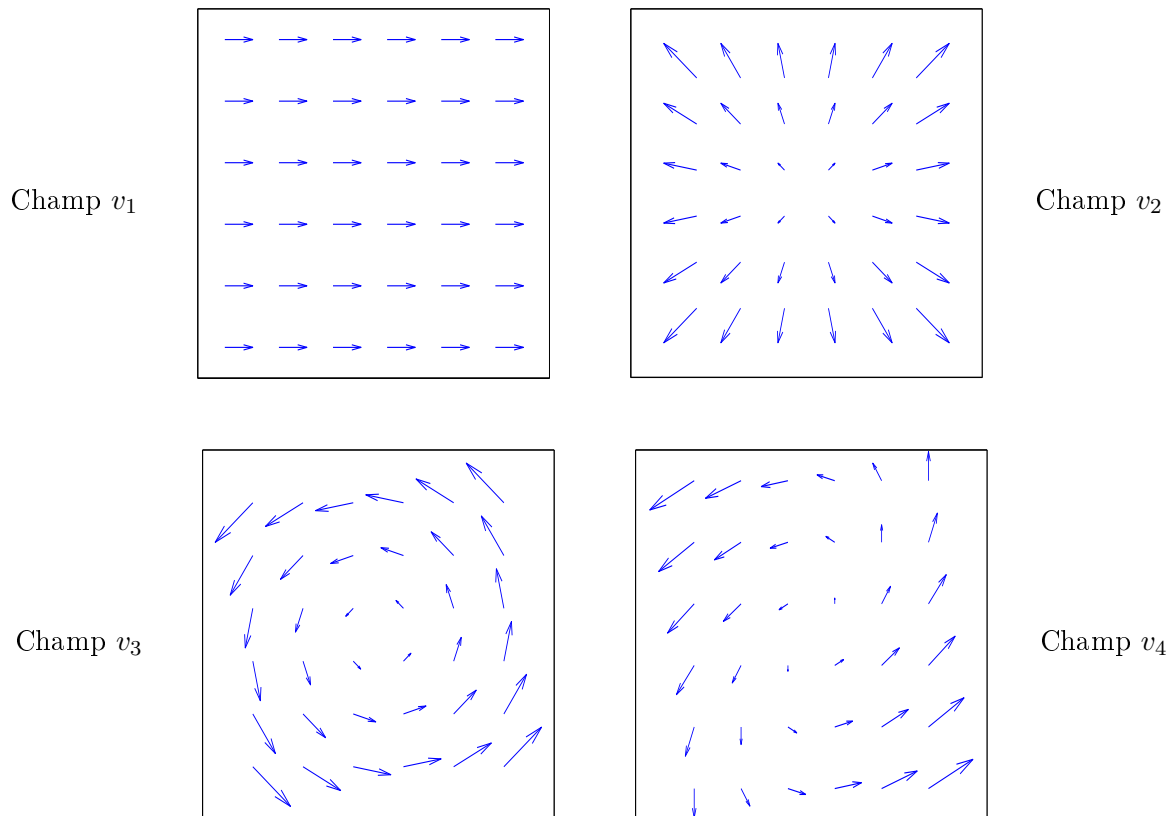


FIGURE A.3 – Exemples de champs vectoriels plans.

A.2.5 Propriétés des opérateurs

Nous donnons les principales propriétés des opérateurs sans indiquer les démonstrations qui sont évidentes. Soient f et g deux champs scalaires et F et G deux champs vectoriels.

Les opérateurs gradient, divergence, rotationnel et laplacien sont linéaires :

- $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$,
- $\operatorname{div}(F + G) = \operatorname{div}(F) + \operatorname{div}(G)$,
- $\operatorname{rot}(F + G) = \operatorname{rot}(F) + \operatorname{rot}(G)$,
- $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$.

Ces opérateurs appliqués à un produit de fonctions donnent les relations suivantes :

- $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$,
- $\operatorname{div}(fG) = f\operatorname{div}(G) + G \cdot \nabla f$,
- $\operatorname{rot}(fG) = f\operatorname{rot}(G) + \nabla f \wedge G$,
- $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla g$,
- $\nabla(F \cdot G) = F \wedge \operatorname{rot}(G) + G \cdot \nabla F + G \wedge \operatorname{rot}(F) + F \cdot \nabla G$,
- $\operatorname{div}(F \wedge G) = \operatorname{rot}(F) \cdot G - F \cdot \operatorname{rot}(G)$,

$$\bullet \operatorname{rot}(F \wedge G) = F \operatorname{div}(G) + G \cdot \nabla F - G \operatorname{div}(F) - F \cdot \nabla G,$$

Il est également possible d'effectuer des compositions entre les différents opérateurs dont voici quelques exemples :

- $\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f,$
- $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0,$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(F)) = \nabla(\operatorname{div}(F)) - \Delta F,$
- $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0,$
- $\operatorname{rot}(f \nabla g) = \nabla f \wedge \nabla g,$
- $\Delta(\nabla f) = \nabla(\Delta f),$
- $\Delta(\operatorname{div}(F)) = \operatorname{div}(\Delta F),$
- $\Delta(\operatorname{rot}(F)) = \operatorname{rot}(\Delta F).$

Les relations suivantes seront particulièrement employées :

- $\operatorname{div}(fI) = \nabla f,$
- $F \cdot \nabla F = \frac{1}{2} \nabla F^2 + \operatorname{rot}(F) \wedge F,$
- $(\operatorname{rot}(F) \wedge F) \cdot G = \operatorname{rot}(F) \cdot (F \wedge G),$
- $\operatorname{div}(\nabla^\top v) = \nabla(\operatorname{div}(v)),$
- $\operatorname{div}(F \otimes G) = F \operatorname{div}(G) + G \cdot \nabla F.$

A.3 Forces conservatives

Une force F est *conservative* si le travail W qu'elle fournit est indépendant du chemin suivi par son point d'application :

$$W_{AB} = \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot dl = \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot dl.$$

Les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 représentent deux chemins possibles entre les points A et B. La quantité $dl \stackrel{\text{def}}{=} (dl_x, dl_y, dl_z)^\top$ est un petit déplacement le long de \mathcal{C}_1 ou \mathcal{C}_2 .

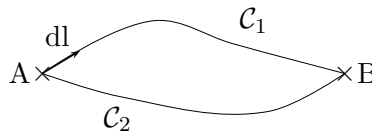


FIGURE A.4 – Exemples de chemins d'application d'une force entre deux points.

Propriété 14. Une force F est conservative si et seulement s'il existe un champ scalaire U tel que $F = -\nabla U$. Sous cette condition, la force F dérive du champ U , appelé le potentiel et homogène à une énergie.

Démonstration. Soit \mathcal{C} une courbe fermée délimitant une surface \mathcal{S} .

$$F \text{ cons.} \Rightarrow \forall(\mathcal{C}, \mathcal{S}), W = \oint_{\mathcal{C}} F \cdot dl = \int_{\mathcal{S}} \text{rot}(F) \cdot n \, dS = 0 \Rightarrow \text{rot}(F) = 0 \Rightarrow F = -\nabla U.$$

$$F = -\nabla U \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B F \cdot dl = - \int_A^B \nabla U \cdot dl = - \int_A^B dU = U(A) - U(B) \Rightarrow F \text{ cons.}$$

□

Les forces gravitationnelle et électrique sont conservatives puisqu'elles dérivent respectivement des potentiels gravitaire et électrique. En revanche, les forces de frottement par exemple ne sont pas conservatives.

Propriété 15. *Le travail entre les points A et B d'une force conservative dérivant du potentiel U est $W_{AB} = U(A) - U(B)$.*

Démonstration. voir la démonstration de la propriété 1.

□

Propriété 16. *L'énergie mécanique d'un système soumis uniquement à des forces conservatives est conservée.*

Démonstration. D'après le théorème de l'énergie cinétique, il y a égalité entre la variation de l'énergie cinétique et le travail de la force,

$$W_{AB} = E_c(B) - E_c(A).$$

D'après la propriété 2, le travail W_{AB} est également donné par

$$W_{AB} = U(A) - U(B).$$

La somme de ces deux équations donne

$$E_c(A) + U(A) = E_c(B) + U(B),$$

où $E_c + U$ est par définition l'énergie mécanique du système.

□

Annexe B

Compléments de MMC

Nous précisons dans cette annexe les théorèmes de Leibniz et de Reynolds généralisé ainsi que les interprétations des tenseurs des taux de déformation D et des taux de rotation W .

B.1 Théorème de Leibniz

Le théorème de Leibniz (philosophe et scientifique allemand, 1646–1716) permet de dériver une intégrale dont les bornes dépendent de la variable d'intégration.

Théorème de Leibniz. *La dérivation d'une intégrale par rapport à une variable s présente dans les bornes de l'intégrale est donnée par*

$$\frac{d}{ds} \int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} f(s, z) dz = \int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} \frac{\partial f}{\partial s} f(s, z) dz + \beta'(s) f(s, \beta(s)) - \alpha'(s) f(s, \alpha(s)).$$

Démonstration. Le théorème de Reynolds s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f dV = \int_{\Omega^t} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega^t} f v_n dS,$$

en explicitant la dérivée particulaire et en utilisant le théorème de Gauss. La simplification dans le cas monodimensionnel, *i.e.* $\Omega^t = [\alpha(t), \beta(t)]$, est

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f dx = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + \left[f \frac{dx}{dt} \right]_{\alpha(t)}^{\beta(t)},$$

qui est bien le résultat (les variables (t, x) sont renommées (s, z)). □

B.2 Théorème de Reynolds généralisé

La formule de transport (1.4) suppose que le champ f est dérivable en temps et continu en espace. Cette hypothèse n'est pas vérifiée lorsque la masse volumique et la vitesse varient rapidement sur une distance courte. Les interfaces matérielles séparant deux milieux immiscibles, les ondes de choc dans les écoulements supersoniques, les impacts d'explosion sur les structures sont des exemples de telles situations. Soient Ω_1^t et Ω_2^t , les parties régulières de $\Omega^t = \Omega_1^t \cup \Omega_2^t$ séparées par une surface de discontinuité Γ^t se propageant à la vitesse w . Le théorème de Reynolds généralisé contient un terme supplémentaire lié à ces variations au niveau de la surface de discontinuité.

Théorème de Reynolds généralisé. La dérivée particulière d'une intégrale de volume définie en densité volumique d'une grandeur $f(x, t)$ décrite par les variables eulériennes et contenant une discontinuité au niveau d'une surface Γ^t est

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f \, dV = \int_{\Omega^t} \left(\frac{df}{dt} + f \operatorname{div}(v) \right) dV - \int_{\Gamma^t} \llbracket f \rrbracket w n_{\Gamma} \, dS,}$$

où $\llbracket f \rrbracket \stackrel{\text{def}}{=} f|_{\Omega_2^t} - f|_{\Omega_1^t}$ est le saut à travers Γ^t et n_{Γ} la normale à Γ^t dirigée de Ω_1^t vers Ω_2^t .

Démonstration. La formule de transport appliquée sur chaque partie régulière donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_1^t} f \, dV = \int_{\Omega_1^t} \frac{df}{dt} \, dV + \int_{\partial\Omega_1^t \setminus \Gamma^t} f v n \, dS + \int_{\Gamma^t} f w n_{\Gamma} \, dS.$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_2^t} f \, dV = \int_{\Omega_2^t} \frac{df}{dt} \, dV + \int_{\partial\Omega_2^t \setminus \Gamma^t} f v n \, dS - \int_{\Gamma^t} f w n_{\Gamma} \, dS.$$

La somme de ces deux équations et la définition du saut terminent la preuve. \square

B.3 Interprétation des composantes des tenseurs D et W

Nous étudions l'évolution d'un volume matériel infinitésimal constitué d'un rectangle ABCD soumis à plusieurs champs de vitesse. La figure B.1 représente une déformation quelconque et nous considérons successivement trois champs de vitesse faisant apparaître les composantes diagonales du tenseur D , les composantes extra-diagonales de D et les composantes de W .

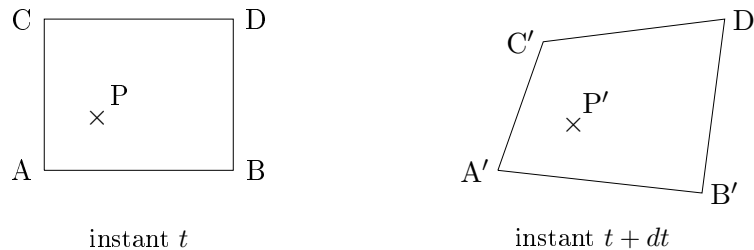


FIGURE B.1 – Déformation quelconque d'un volume infinitésimal de fluide.

Nous considérons un point quelconque P du rectangle ABCD et calculons la variation du vecteur AP pendant l'intervalle de temps dt ,

$$A'P' - AP = PP' - AA' = (v_P - v_A)dt \stackrel{(1.7)}{=} \nabla v \, dx \, dt \stackrel{2d}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \end{pmatrix} dt. \quad (\text{B.1})$$

B.3.1 Dilatation

Le volume est dilaté ou contracté ce qui se traduit par une vitesse uniforme et orthogonale sur chaque côté. Sur la figure B.2, une vitesse est imposée sur les côtés AB et AC.

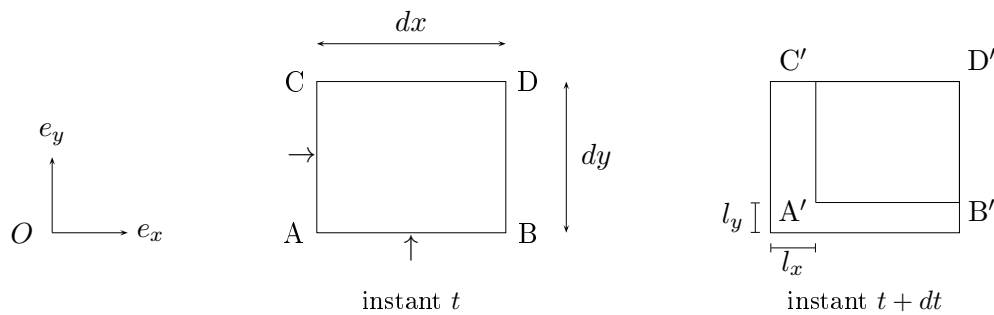


FIGURE B.2 – Dilatation d'un volume infinitésimal de fluide.

La variation l_x (étirement ou rétrécissement) du côté AB pendant le temps dt est obtenue avec la relation (B.1) en prenant $dy = 0$ et en considérant seulement la direction Ox ,

$$l_x = (A'B' - AB) \cdot e_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt.$$

De même la variation l_y du côté AC pendant le temps dt est obtenue en prenant $dx = 0$ et en considérant seulement la direction Oy ,

$$l_y = (A'C' - AC) \cdot e_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dt.$$

Les termes diagonaux de D représentent les **taux de dilatation** dans les directions considérées.

B.3.2 Déformation angulaire

Le volume est soumis à un champ de vitesse qui provoque la rotation des faces en sens opposés pour les côtés horizontaux et verticaux du rectangle ABCD. Ainsi, les côtés AB et CD tournent autour de leur point milieu d'un angle α et les côtés AC et BD tournent autour de leur point milieu d'un angle β .

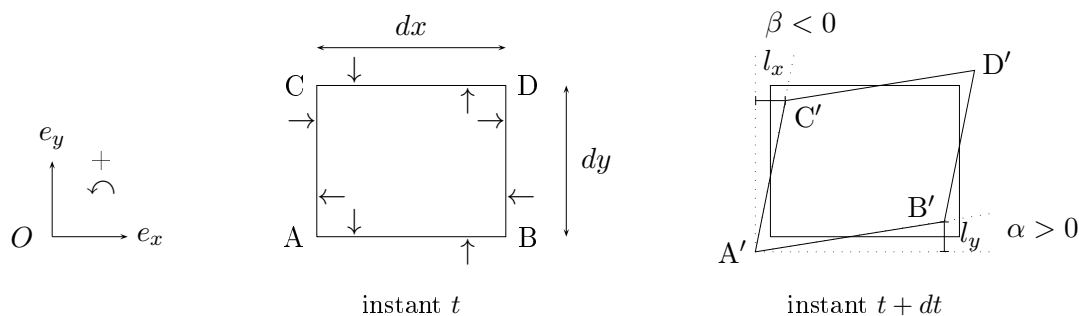


FIGURE B.3 – Déformation angulaire d'un volume infinitésimal de fluide.

Nous calculons les angles α et β en supposant qu'ils sont suffisamment faibles pour les assimiler à leur tangente. L'angle α peut être approché par

$$\alpha \simeq \frac{l_y}{dx} \quad (\text{B.2})$$

La longueur l_y est obtenue par (B.1) avec $dy = 0$ et en considérant seulement la direction Oy ,

$$l_y = (A'B' - AB) \cdot e_y = \frac{\partial v_y}{\partial x} dx dt \quad \stackrel{(B.2)}{\Rightarrow} \quad \frac{\alpha}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

De même, l'angle β (orienté dans le sens négatif) peut être approché par

$$\beta \simeq -\frac{l_x}{dy} \quad (B.3)$$

La quantité l_x est obtenue par (B.1) avec $dx = 0$ et en considérant seulement la direction Ox ,

$$l_x = (A'C' - AC) \cdot e_x = \frac{\partial v_x}{\partial y} dy dt \quad \stackrel{(B.3)}{\Rightarrow} \quad \frac{\beta}{dt} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Le taux de variation de l'angle γ est finalement

$$\frac{\gamma}{dt} = -\frac{(\alpha - \beta)}{dt} = -\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Les termes extra-diagonaux de D représentent les *taux de déformation angulaire* ou *taux de cisaillement*.

B.3.3 Rotation

Le volume est soumis à un champ de vitesse provoquant la rotation des faces dans le même sens pour les côtés horizontaux et verticaux du rectangle ABCD.

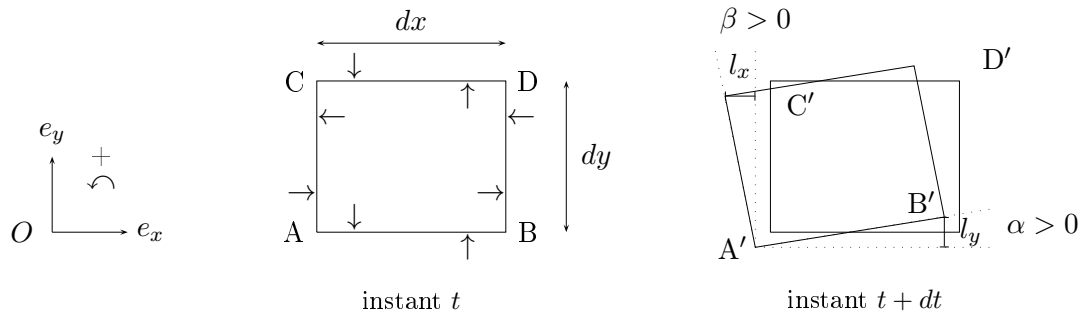


FIGURE B.4 – Rotation d'un volume infinitésimal de fluide.

Les angles α et β sont calculés comme précédemment,

$$\frac{\alpha}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{dt} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Le taux de rotation $\frac{\omega}{dt}$ est finalement

$$\frac{\omega}{dt} = \frac{\alpha}{dt} - \frac{\beta}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

Les termes de W représentent les *taux de rotation* ou *vitesse angulaires de rotation*.

Principales notations

Introduction

e_x, e_y, e_z : vecteurs de base de \mathbb{R}^3	—
n : normale extérieure unitaire	—
$x = (x, y, z)^\top$: coordonnées d'un point	m
$u = (u_x, u_y, u_z)^\top$: déplacement	m
$v = (v_x, v_y, v_z)^\top$: vitesse	$m \cdot s^{-1}$
$a = (a_x, a_y, a_z)^\top$: accélération	$m \cdot s^{-2}$
$F = (F_x, F_y, F_z)^\top$: force extérieure massique	$N \cdot kg^{-1}$
D : tenseur des taux de déformation	s^{-1}
W : tenseur des taux de rotation	s^{-1}
σ : tenseur des contraintes	Pa
τ : tenseur des contraintes visqueuses	Pa
I : tenseur identité	—
p : pression	Pa
ρ : masse volumique de l'eau	$kg \cdot m^{-3}$

Hydrostatique

W : travail d'une force	J
U : potentiel d'une force conservative	J
$g = (0, 0, g)^\top$: accélération de la gravité	$m \cdot s^{-2}$
p_0 : pression atmosphérique	Pa
G : centre de gravité d'une surface plane	—
p_G : pression au centre de gravité G	Pa
γ : tension superficielle	$J \cdot m^{-2}$

Fluides parfaits

H : charge hydraulique	m
Q : débit volumique	$m^3 \cdot s^{-1}$
Ω : vecteur tourbillon	s^{-1}
φ : potentiel des vitesses	$m^2 \cdot s^{-1}$
ψ : fonction de courant	$m^2 \cdot s^{-1}$
f : potentiel complexe	
w : vitesse complexe	

Fluides réels

μ : viscosité dynamique	$Pa \cdot s$
ν : viscosité cinématique	$m^2 \cdot s^{-1}$
Re_e : nombre de Reynolds	—

H_l : perte de charge linéaire	m
H_s : perte de charge singulière	m
λ : coefficient de perte de charge linéaire	—
k : coefficient de perte de charge linéaire	—
τ_p : contrainte pariétale	Pa
v_* : vitesse de frottement	$m \cdot s^{-1}$
ϵ : rugosité	mm
\mathbf{v} : vitesse en dehors de la couche limite	$m \cdot s^{-1}$
δ : épaisseur de la couche limite	m
v^* : vitesse adimensionnelle	—

Écoulements turbulents

\bar{v} : vitesse moyenne (temporelle ou statistique)	$m \cdot s^{-1}$
v' : fluctuation de vitesse	$m \cdot s^{-1}$
R : tenseur de Reynolds	$J \cdot kg^{-1}$
ν_t : viscosité turbulente	$m^2 \cdot s^{-1}$
ν_e : viscosité effective	$m^2 \cdot s^{-1}$
l_m : longueur de mélange	m
k : énergie turbulente	$J \cdot kg^{-1}$
ϵ : taux de dissipation d'énergie	$J \cdot kg^{-1} \cdot s^{-1}$
p_m : pression modifiée	Pa
K : constante de Karmann	—

Écoulements à surface libre

η : côte de la surface libre	m
z_f : côte du fond	m
$\mathbf{v} = (v_x, v_y)^\top$: vitesse horizontale moyenne	m
h : hauteur d'eau	m
\tilde{H}_s : charge spécifique	m
F_r : nombre de Froude	—
I : pente du fond	—
J : frottement sur le fond et/ou les berges	—
P : périmètre mouillé	m
R_h : rayon hydraulique	m
\mathcal{K}_s : coefficient de Strikler	$m^{1/3} \cdot s^{-1}$

Index

- énergie turbulente, 82
- équation d'Euler, 41
- équation d'énergie, 22
- équation d'équilibre, 21
- équation de Blasius, 76
- équation de NS adimensionnée, 77
- équation de Navier–Stokes, 60
- équation de Pascal, 28
- équation de Reynolds, 82
- équation de Stokes, 62
- équations de Prandtl, 75
- équations de Saint–Venant, 89

- baromètre, 31

- charge hydraulique, 42
- charge spécifique, 94
- couche limite, 74

- décomposition de Reynolds, 81
- dérivée particulaire, 14
- densimètre, 36
- description eulérienne, 13
- description lagrangienne, 13
- diagramme de charge, 73
- diagramme de Moody, 70
- diagramme de pression, 29
- divergence, 102

- expérience de Newton, 59
- expérience de Reynolds, 79

- fluide, 23
- fonction de courant, 51
- force conservative, 106
- formule de Chézy, 94
- formule de Manning–Strickler, 95
- formule de Toricelli, 44
- formules de Blasius, 53

- gradient, 102
- hauteur critique, 95

- hauteur normale, 97

- inégalité d'entropie, 22

- laplacien, 104
- lignes de courant, 14
- loi de Laplace, 37
- longueur de mélange, 83

- manomètre, 30
- modèle de longueur de mélange, 83

- nombre d'Euler, 77
- nombre de Froude, 77
- nombre de Knudsen, 12
- nombre de Reynolds, 63, 77
- nombre de Strouhal, 77

- opérateurs différentiels, 101

- perte de charge linéaire, 68
- perte de charge singulière, 72
- potentiel, 107
- potentiel complexe, 52
- potentiel des vitesses, 49
- presse hydraulique, 31
- principe d'Archimède, 35
- principe des vases communicants, 29
- principes de conservation, 20

- relation d'Euler, 14
- rotationnel, 104

- similitude, 78
- symétrie du tenseur des contraintes, 21

- tenseur de Reynolds, 82
- tenseur des contraintes, 19
- tenseur des taux de déformation, 17
- tenseur des taux de rotation, 17
- tension superficielle, 37
- théorème d'Euler, 47
- théorème de Bernoulli, 42
- théorème de Bernoulli généralisé, 67

théorème de Lagrange, 49
théorème de Leibniz, 90, 109
théorème de Reynolds, 14
théorème de Reynolds généralisé, 109
théorème de Vaschy–Buckingham, 78
trajectoire, 13
tube de Pitot, 45
tube de Venturi, 45
tube piézométrique, 30

vecteur contrainte, 18
viscosité cinématique, 61
viscosité dynamique, 60
viscosité effective, 84
viscosité turbulente, 83
vitesse complexe, 52

Table des figures

1.1	Variation de la masse volumique suivant l'échelle considérée.	12
1.2	Configurations initiale et courante d'un système.	13
1.3	Tube de courant.	14
1.4	Exemple de décomposition de ∇v suivant les transformations de base.	18
1.5	Efforts intérieurs représentés par une densité surfacique de forces T	18
1.6	Contraintes s'appliquant sur les facettes d'un cube.	20
1.7	Diagramme de phase de l'eau.	23
1.8	Interprétation du terme advectif de la dérivée particulaire.	25
2.1	Equation de Pascal suivant deux configurations différentes.	28
2.2	Diagramme de pression.	29
2.3	Principe des vases communicants.	29
2.4	Différence de pression entre deux points d'un même fluide.	30
2.5	Schémas de principe des appareils de mesures de pression.	30
2.6	Schéma d'une presse hydraulique.	31
2.7	Vue et coupe de la surface plane immergée.	32
2.8	Force de pression sur une surface quelconque immergée.	33
2.9	Projection de la surface \mathcal{S} suivant la verticale.	34
2.10	Projection de la surface \mathcal{S} suivant une direction horizontale.	35
2.11	Mesure de la masse volumique d'un fluide avec un densimètre.	36
2.12	Illustrations de la tension superficielle.	36
2.13	Origine microscopique de la tension superficielle.	37
2.14	Equilibre des forces d'un élément de surface.	38
2.15	Illustrations de la loi de Jurin et de la formule de Young.	39
3.1	Particule fluide en rotation.	43
3.2	Vidange d'un réservoir.	44
3.3	Tube de Pitot dans un écoulement horizontal.	45
3.4	Tube de Venturi dans un écoulement horizontal.	45
3.5	Vidange d'un réservoir.	46
3.6	Tube de courant dans un écoulement permanent.	47
3.7	Coude dans une canalisation (plan horizontal).	48
3.8	Détermination du débit dans un écoulement potentiel.	52
3.9	Position des points d'arrêt suivant la valeur de la circulation.	55
3.10	Lignes de courant autour du cylindre en fonction de la circulation Γ	55
3.11	Equipotentiels autour du cylindre en fonction de la circulation Γ	56
3.12	Décomposition de la force de pression locale autour du cylindre.	57
4.1	Expérience de Newton.	59
4.2	Différents types de fluides.	61

4.3	Expérience de Taylor.	62
4.4	Écoulement de Couette entre deux plans horizontaux.	64
4.5	Écoulement de Poiseuille entre deux plans horizontaux.	65
4.6	Écoulement de Couette et de Poiseuille entre deux plans horizontaux.	65
4.7	Champ de vitesse suivant le type d'écoulement.	66
4.8	Écoulement dans une conduite circulaire.	68
4.9	Divergent.	72
4.10	Exemple de circuit hydraulique.	73
4.11	Diagramme de charge du circuit.	73
4.12	Couche limite laminaire au niveau d'une paroi plane.	74
4.13	Profil de vitesse dans la couche limite sur une plaque plane.	77
5.1	Dispositif des expériences de Reynolds.	79
5.2	Différents régimes d'écoulement suivant le nombre de Reynolds.	80
5.3	Écoulement de Poiseuille entre deux plans horizontaux.	85
5.4	Profil de vitesse en régime turbulent et comparaison avec le régime laminaire	87
6.1	Notations concernant les équations de Saint–Venant.	90
6.2	Écoulement permanent uniforme avec pente constante.	94
6.3	Minimisation de la charge et maximisation du débit.	96
6.4	Allure des lignes d'eau – canal à faible pente.	98
6.5	Allure des lignes d'eau – canal à forte pente.	98
A.1	Exemples de gradient de champs scalaires plans.	103
A.2	Types de variations locales dans un fluide selon le signe de $div(v)$	103
A.3	Exemples de champs vectoriels plans.	105
A.4	Exemples de chemins d'application d'une force entre deux points.	106
B.1	Déformation quelconque d'un volume infinitésimal de fluide.	110
B.2	Dilatation d'un volume infinitésimal de fluide.	111
B.3	Déformation angulaire d'un volume infinitésimal de fluide.	111
B.4	Rotation d'un volume infinitésimal de fluide.	112

