

Hydrodynamique  
Exercices

Pierre Sochala



# Table des matières

<b>Chapitre 1 Introduction</b>	<b>5</b>
1.1 Bases de mécanique des milieux continus . . . . .	5
1.2 Mécanique des fluides . . . . .	7
<b>Chapitre 2 Hydrostatique</b>	<b>9</b>
2.1 Equation de l'hydrostatique . . . . .	9
2.2 Résultante des forces de pression . . . . .	10
<b>Chapitre 3 Fluides parfaits</b>	<b>15</b>
3.1 Equation d'Euler . . . . .	15
3.2 Théorème de Bernoulli . . . . .	15
3.3 Théorème d'Euler . . . . .	18
3.4 Ecoulements irrotationnels . . . . .	19
3.5 Ecoulements irrotationnels plans . . . . .	19
<b>Chapitre 4 Fluides réels</b>	<b>21</b>
4.1 Fluides newtoniens . . . . .	21
4.2 Viscosimétrie . . . . .	22
4.3 Pertes de Charges . . . . .	24
4.4 Théorème de Bernoulli généralisé . . . . .	27
4.5 Similitude - Analyse dimensionnelle . . . . .	31
<b>Chapitre 5 Ecoulements turbulents</b>	<b>35</b>
<b>Chapitre 6 Ecoulements à surface libre</b>	<b>37</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Bases de mécanique des milieux continus

**Exercice 1.** Nous souhaitons vérifier le théorème de Stokes

$$\int_{\mathcal{S}} \text{rot}(v) \cdot n \, dS = \oint_{\partial\mathcal{S}} v \cdot t \, dl,$$

sur le triangle rectangle  $\mathcal{S}$  de la figure 1.1 avec le champ de vitesse  $v = \begin{pmatrix} y - \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix}$ .

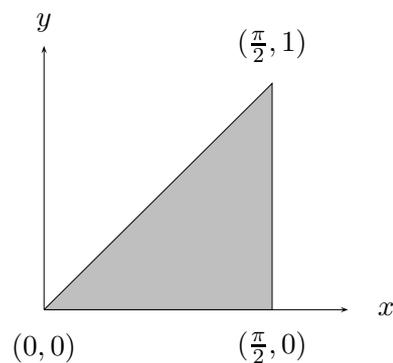


FIGURE 1.1 – Triangle rectangle.

1. Déterminer  $\text{rot}(v) \cdot n$  où  $n$  est la normale extérieure sortante à  $\mathcal{S}$ .
2. Calculer  $\int_{\mathcal{S}} \text{rot}(v) \cdot n \, dS$ .
3. Donner le vecteur  $t$  des différentes parties de  $\partial\mathcal{S}$ .
4. Calculer  $\oint_{\partial\mathcal{S}} v \cdot t \, dl$ .

**Exercice 2.** Nous considérons une fonction scalaire  $f(x, t)$  d'un écoulement unidirectionnel de vitesse  $u(x, t)$  et définissons le changement de repère des variables d'Euler  $(x, t)$  par la transformation galiléenne :

$$x = x' + u_0 t' \quad \text{et} \quad t = t',$$

où  $u_0$  est une vitesse constante.

1. Donner les dérivées particulières  $\frac{df(x,t)}{dt}$  et  $\frac{df(x',t')}{dt'}$  dans leurs repères respectifs.
2. Etablir les dérivées partielles  $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x'}$  et  $\frac{\partial f(x',t')}{\partial t'}$  en fonction de  $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f(x',t')}{\partial t}$ .
3. En déduire la relation entre les dérivées particulières dans les deux repères. Conclure.

**Exercice 3.** Nous considérons les trois champs de vitesse bidimensionnels suivants

$$v_1 = \begin{pmatrix} x + 3y \\ -3x + y \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -x + y \\ x - y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2y \\ 4x \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler les transformations élémentaires que peut subir une particule fluide.
2. Expliciter ces déformations dans le cas des champs  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ . Conclure.

**Exercice 4.** Soient  $f$  un champ scalaire,  $u$  un champ vectoriel et  $A$  un champ tensoriel d'ordre deux. Démontrer les relations suivantes

1.  $\operatorname{div}(fA) = f \operatorname{div}(A) + A \nabla f$
2.  $\operatorname{div}(Au) = \operatorname{div}(A^\top) \cdot u + A : \nabla u$ , où  $^\top$  désigne la transposée et  $:$  le produit doublement contracté défini par  $A : B = A_{ij} B_{ji}$ .
3.  $A : B = 0$  si  $A$  est symétrique et  $B$  (un champ tensoriel) antisymétrique.

*Indication : on se placera en dimension 2 pour alléger les calculs.*

**Exercice 5.** Nous souhaitons démontrer le théorème de l'énergie cinétique.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \frac{\rho v^2}{2} = \int_{\Omega^t} \rho f \cdot v + \int_{\partial \Omega^t} \sigma n \cdot v - \int_{\Omega^t} \sigma : D \quad (1.1)$$

1. Que représentent  $\sigma$  et  $D$  ?
2. Montrer que  $\operatorname{div}(\sigma v) = \operatorname{div}(\sigma) \cdot v + \sigma : D$
3. Montrer que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \frac{\rho v^2}{2} = \int_{\Omega^t} \frac{\rho}{2} \frac{dv^2}{dt}.$$

4. En déduire la démonstration de (1.1).

L'équation (1.1) peut s'écrire sous la forme  $P^e = \frac{dK}{dt} + P^i$ , avec

$$K := \int_{\Omega^t} \frac{\rho v^2}{2}, \quad P^e := \int_{\Omega^t} \rho f \cdot v + \int_{\partial \Omega^t} \sigma n \cdot v, \quad P^i := \int_{\Omega^t} \sigma : D,$$

où  $K$  est l'énergie cinétique,  $P^e$  les puissances extérieures et  $P^i$  les puissances intérieures. Cela signifie que *la puissance extérieure fournie à un milieu continu se transforme en mouvement et/ou en déformation.*

5. Donner la répartition de puissance extérieure dans ces différents cas :
  - une boule de billard après impulsion,
  - un crash de voiture,
  - une boule de caoutchouc comprimée lentement.

## 1.2 Mécanique des fluides

**Exercice 6.** Trois coefficients thermoélastiques sont définis pour chaque fluide : le coefficient de dilatation isobare  $\alpha$ , le coefficient d'augmentation de pression isochore  $\beta$  et le coefficient de compressibilité isotherme  $\chi_T$ .

1. Donner les expressions générales de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\chi_T$ .
2. Déterminer  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\chi_T$  dans le cas d'un gaz parfait. En déduire  $\frac{\alpha}{\beta\chi_T}$ .

**Exercice 7.** Nous considérons les écoulements plans suivant

$$v_1 = \begin{pmatrix} u_0 + a(t - t_1) \\ v_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} x/(1+t) \\ 2y/(2+t) \end{pmatrix}.$$

Pour chaque champ de vitesse,

1. Le mouvement est-il permanent ? solénoïdal ?
2. Donner l'équation des lignes de courant.
3. Déterminer la trajectoire de la particule passant par  $(x_0, y_0)$  à  $t = 0$ .



# Chapitre 2

## Hydrostatique

### 2.1 Equation de l'hydrostatique

**Exercice 8.** Deux fluides non miscibles sont versés dans un tube en U. A l'équilibre, ils sont disposés comme indiqué sur la figure 2.1a.

1. Ecrire la relation entre  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .
2. En déduire une méthode de détermination de la densité d'un fluide.

**Exercice 9.** Nous utilisons un tube en U contenant du mercure ( $\rho_2 = 13600\text{kg.m}^{-3}$ ). Dans l'une des branches nous versons de l'eau ( $\rho_1 = 1000\text{kg.m}^{-3}$ ) et dans l'autre branche nous versons de l'essence ( $\rho_3 = 700\text{kg.m}^{-3}$ ). Nous supposons que les fluides ne se mélangent pas (figure 2.1b).

1. A l'équilibre, écrire la relation entre  $z_0$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .
2. Calculer  $z_0$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  sachant que  $z_0 - z_1 = 0.2\text{m}$ ,  $z_3 - z_2 = 0.1\text{m}$  et  $z_1 + z_2 = 1\text{m}$ .

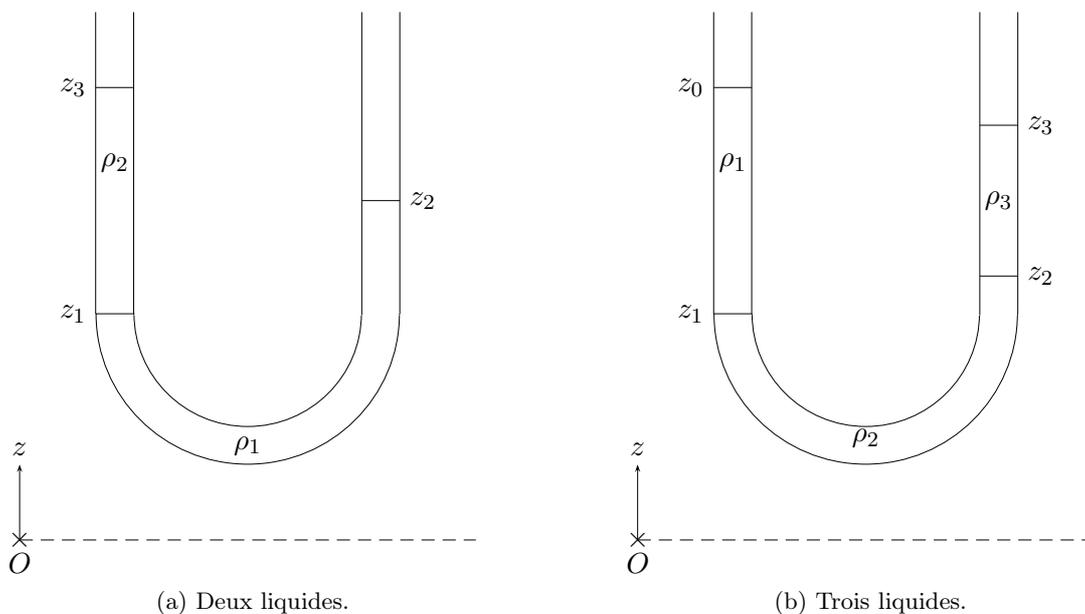


FIGURE 2.1 – Tubes en U.

## 2.2 Résultante des forces de pression

**Exercice 10.** Un bassin contenant de l'eau sur une hauteur  $h$  est fermé par une porte verticale constituée de deux panneaux plans superposés de largeur  $l$ . On souhaite que chaque panneau supporte le même effort. Les hauteurs des panneaux sont notées  $h_{\text{sup}}$  et  $h_{\text{inf}}$  comme représentées à la figure 2.2. Les altitudes des centres de poussée sont notées  $\lambda_{\text{sup}}$  et  $\lambda_{\text{inf}}$ .

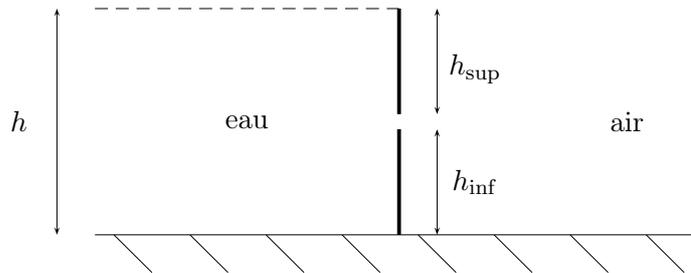


FIGURE 2.2 – Porte verticale.

1. Le panneau inférieur est-il plus grand que le panneau supérieur ? Justifier.
2. Déterminer les hauteurs  $h_{\text{sup}}$  et  $h_{\text{inf}}$ . AN avec  $h = 3m$ .
3. Calculer les altitudes des centres de poussée de chaque panneau. AN avec  $h = 3m$ .

**Exercice 11.** Nous souhaitons calculer la résultante des forces de pression sur des barrages de largeur  $b$  (suivant  $y$ ) et de formes différentes dans le plan  $(Oxz)$ . Nous considérons

- une section rectangulaire,
- une section trapézoïdale de base  $l$  immergée,
- une section parabolique décrite par l'équation  $x^2 = \alpha z$ .

La hauteur d'eau en  $x = z = 0$  est notée  $h$  comme indiquée sur la figure 2.3.

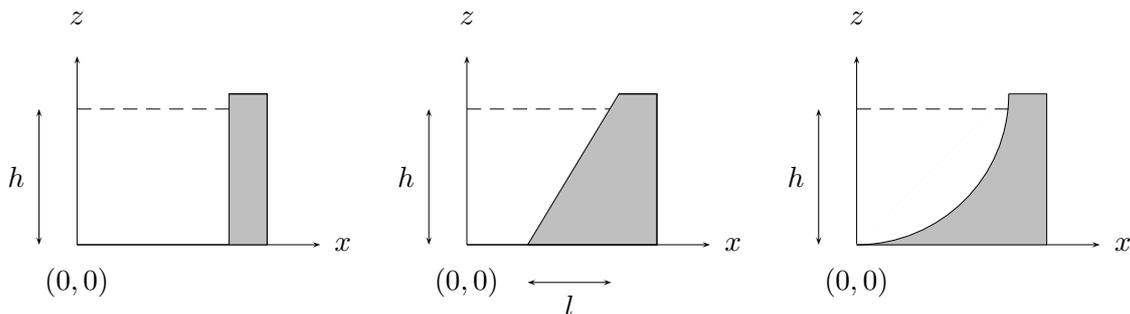


FIGURE 2.3 – Sections transversales de différents barrages.

Pour chaque barrage :

1. Calculer la composante horizontale de la résultante des forces pressantes.
2. Calculer la composante verticale de la résultante des forces pressantes.
3. AN pour  $h = 32m$ ,  $b = 30m$ ,  $l = \alpha = 16m$ ,  $\rho = 1000kg.m^{-3}$  et  $g = 9.81m.s^{-1}$ .
4. Exprimer  $l$  en fonction de  $\alpha$  pour que la composante verticale de la résultante des forces pressantes soit identique pour les barrages à sections trapézoïdale et parabolique. AN.

**Exercice 12.** Une citerne à fioul de capacité volumique  $C$  est constituée d'un tronçon central cylindrique encadré de deux extrémités hémisphériques comme illustré à la figure 2.4. La notice porte la mention : **Pose en zone inondable: prévoir 4 points d'ancrage dans un socle en béton.**

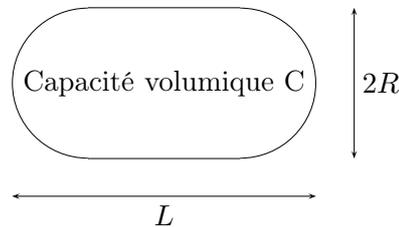


FIGURE 2.4 – Citerne à fioul.

1. Pourquoi est-il nécessaire de prendre des précautions ?
2. Calculer le volume de la cuve.
3. Calculer la poussée d'Archimède lorsque la cuve est entièrement immergée dans l'eau.
4. Déterminer l'intensité de l'effort supporté par chaque point d'ancrage lorsque la cuve entièrement immergée est à moitié remplie de fioul.

La masse de la citerne vide est  $M = 150kg$  et ses dimensions sont  $L = 2.05m$  et  $R = 0.63m$ . La masse volumique du fioul  $\rho_f$  est  $840kg.m^{-3}$ .

**Exercice 13.** Un cuvelage rectangulaire en béton est fabriqué pour protéger un parking souterrain contre les montées de nappe phréatique éventuelles. Les dimensions extérieures sont de ce cuvelage sont : longueur  $L$ , largeur  $l$  et hauteur  $H$ . L'épaisseur du fond et des parois verticales est notée  $e$  et la nappe phréatique se situe à une hauteur  $h$  au-dessus du fond du parking.

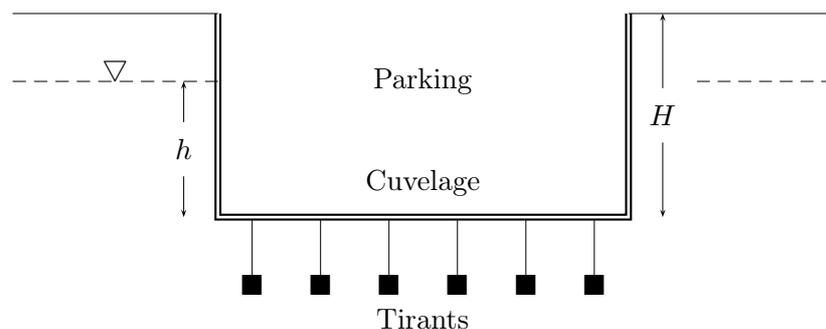


FIGURE 2.5 – Coupe (transversale ou longitudinale).

1. Déterminer la masse du cuvelage.
2. Donner l'intensité de la force exercée par l'eau sur les parois verticales et le fond du cuvelage.
3. Donner la poussée d'Archimède que subit le cuvelage.
4. Déterminer la hauteur d'eau limite  $h_{lim}$  à partir de laquelle le cuvelage doit être ancré.
5. Calculer l'intensité de la force exercée par les tirants sur le cuvelage pour  $h = 2h_{lim}$ .
6. AN avec  $L = 40m$ ,  $l = 12.5m$ ,  $H = 4.75m$ ,  $e = 30cm$  et  $\rho_{beton} = 2200kg.m^{-3}$ .

**Exercice 14.** Le propriétaire d'un parc aquatique vous a contacté pour installer un hublot dans l'aquarium aux requins. Ce dernier doit permettre aux visiteurs d'avoir une magnifique vue depuis le fond du bassin. Le hublot peut être assimilé à une demi-sphère  $S$  de rayon  $R$  qui repose sur le fond du bassin contenant de l'eau de mer de masse volumique  $\rho$ . La surface libre est à une hauteur  $H$  par rapport au fond horizontal et la pression du fond est notée  $p_f$ . L'axe  $Oz$  est vertical ascendant et a pour origine le fond du bassin (voir figure 2.6).

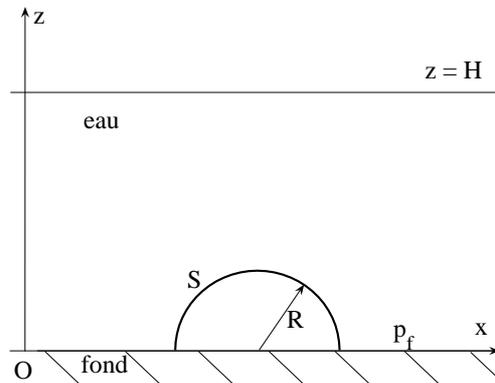


FIGURE 2.6 – Schéma du bassin.

1. Déterminer la résultante des forces de pression s'exerçant sur la surface  $S$  en intégrant la force élémentaire s'exerçant sur une partie élémentaire de  $S$ .
2. Retrouver le résultat de la question précédente de façon globale.

**Exercice 15.** Soit un entonnoir conique d'axe de révolution vertical ascendant  $Oz$ , de demi-angle  $\alpha$ , de hauteur  $H$  et de normale extérieure unitaire  $n$  représenté sur la figure 2.7. On remplit l'entonnoir d'eau sur une hauteur  $h$  en supposant que le contact à la base reste parfait de sorte que l'eau ne s'écoule pas.

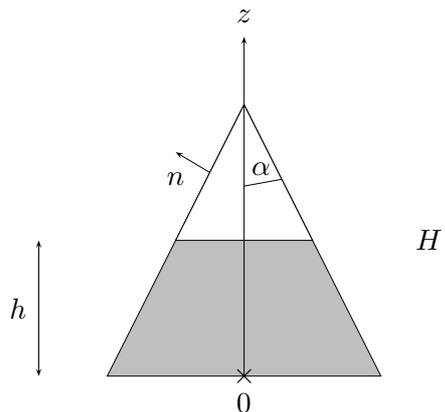


FIGURE 2.7 – Entonnoir conique.

1. Exprimer le champ de pression en fonction de  $z$ .
2. Indiquer la forme générale de la résultante des forces de pression du fluide sur l'entonnoir.
3. Déterminer l'expression d'une surface élémentaire du cône à une hauteur  $z$ .

4. Montrer que la composante verticale de la résultante des forces de pression est

$$F_z = F_0 \int_0^1 (u^2 - (k+1)u + k) du,$$

avec  $u := z/h$  et les quantités  $F_0$  et  $k$  à préciser.

5. AN avec  $\alpha = 30^\circ$ ,  $H = 12\text{cm}$  et  $h = 4\text{cm}$ .  
6. Calculer la masse minimale de l'entonnoir pour que l'eau ne s'écoule pas par la base.

**Exercice 16.** Soit un glaçon ( $\rho_{\text{glace}} = 900\text{kg.m}^{-3}$ ) dans un verre rempli d'eau à ras bord.

1. Pourquoi le glaçon flotte ?
2. Quel est le rapport du volume immergé au volume total ?
3. Le glaçon fond totalement. Comment évolue le niveau de l'eau dans le verre ?

**Exercice 17.** Pour mesurer la masse volumique d'un liquide, nous réalisons trois pesées successives d'un même solide, suspendu sous le plateau d'une balance :

- 1) le solide suspendu à l'air libre est équilibré par une masse  $m_0 = 20.50\text{g}$ ,
- 2) le solide immergé dans de l'eau est équilibré par une masse  $m_1 = 12.70\text{g}$ ,
- 3) le solide immergé dans le liquide dont la masse volumique est inconnue est équilibré par une masse  $m_2 = 14.10\text{g}$ .

Etablir la relation littérale donnant la masse volumique du liquide. AN.

**Exercice 18.** Un solide homogène cubique flotte au niveau de la surface de séparation entre deux liquides immiscibles : l'eau et un hydrocarbure de densité  $d_h=0.75$ . Le cube entièrement immergé a 20% de son volume dans l'eau.

1. Indiquer sans calcul un encadrement de la densité du bloc.
2. Déterminer la masse volumique du bloc.



# Chapitre 3

## Fluides parfaits

### 3.1 Equation d'Euler

**Exercice 19.** Un récipient cylindrique qui contient de l'eau tourne autour de son axe vertical (orienté vers le haut) à une vitesse angulaire  $\omega$  constante.

1. Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique.
2. En déduire que la forme de la surface libre est un parabolôïde d'axe celui du récipient.

*Indication : les accélérations par rapport à des référentiels fixe et mobile sont liées par la relation*

$$a_{\text{abs}} = a_{\text{rel}} + \omega \wedge (\omega \wedge OM) + \frac{d\omega}{dt} \wedge OM + 2\omega \wedge v_{\text{rel}}.$$

### 3.2 Théorème de Bernoulli

**Exercice 20.** Nous souhaitons établir le théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent de fluide compressible irrotationnel et adiabatique. La seule force est la gravité et nous supposons que le fluide vérifie la relation de Laplace

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C,$$

où  $p$  est la pression,  $\rho$  la masse volumique,  $\gamma$  l'indice d'adiabaticité et  $C$  une constante.

1. Etablir la relation entre  $\nabla p$  et  $\nabla \rho$  (en éliminant  $C$ ).
2. En déduire  $\nabla(p/\rho)$  en fonction de  $\nabla p$ ,  $\rho$  et  $\gamma$ .
3. En déduire l'équation d'Euler pour ce fluide.
4. Donner le théorème de Bernoulli obtenu. Conclure.

**Exercice 21.** On considère un tube de courant rectiligne horizontal, à vitesse uniforme sur toute section droite. Le mouvement est permanent et le fluide est incompressible et soumis uniquement à la gravité.

1. Déterminer le champ de vitesse de l'écoulement.
2. Montrer que la pression est hydrostatique à travers la section droite du tube.

**Exercice 22.** On considère un jet d'eau de diamètre initial  $D$  s'élevant verticalement à une hauteur  $h$ . Le frottement de l'air est négligé.

1. Calculer le débit pour alimenter ce jet d'eau.
2. Calculer la pression pour alimenter ce jet d'eau.
3. AN avec  $D = 107\text{mm}$  et  $h = 156\text{m}$ .
4. En déduire la puissance hydraulique ( $1W = 1\text{m}^2.kg.s^{-3}$ ).

*Indication : Considérer les 3 points suivants : un point A au départ du jet, un point B au sommet du jet et un point C dans la conduite d'arrivée d'eau à la même altitude que A.*

**Exercice 23.** Une lance à incendie a un diamètre d'entrée  $D$  et un diamètre d'ajutage (orifice de sortie)  $d$ . Cette lance est reliée à une pompe par un tuyau de diamètre constant  $D$  dans lequel le débit d'alimentation est  $Q$ . La pompe et la lance sont à la même altitude.

1. Déterminer la pression minimale de l'eau en sortie de pompe.
2. Calculer la hauteur du jet lorsque la lance est tenue verticalement.
3. AN avec  $D = 100\text{mm}$ ,  $d = 25\text{mm}$  et  $Q = 1000L \cdot \text{min}^{-1}$ .

**Exercice 24.** Un tube en U de section constante est rempli d'un fluide parfait incompressible de masse volumique  $\rho$ . La longueur totale de fluide est notée  $L$  et nous provoquons des oscillations comme illustré sur la figure 3.1.

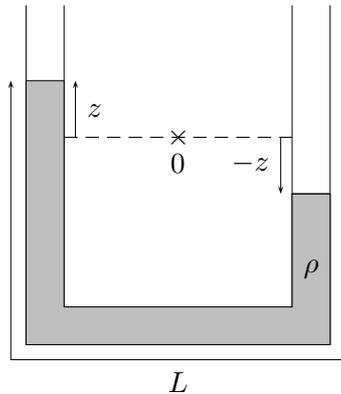


FIGURE 3.1 – Oscillations dans un tube en U.

1. Donner le théorème de Bernoulli en prenant en compte le terme d'accélération.
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la quantité  $z$ .
3. En déduire la période des oscillations.
4. Ce modèle vous paraît-il réaliste ?

**Exercice 25.** Nous étudions l'écoulement bidimensionnel d'un fluide sur une bosse dont la géométrie est décrite par la fonction  $b(x)$  représentée à la figure 3.2. L'objectif est de déterminer la variation de la surface libre  $f(x)$  au niveau de la bosse. Avant et après l'obstacle, l'écoulement est horizontal (vitesse  $v = v_x x$ ) et la hauteur  $H$  de fluide est constante. L'écoulement est permanent et le fluide incompressible. Les variations de la surface libre et de la côte du fond sont négligeables devant la hauteur d'eau  $H$ .

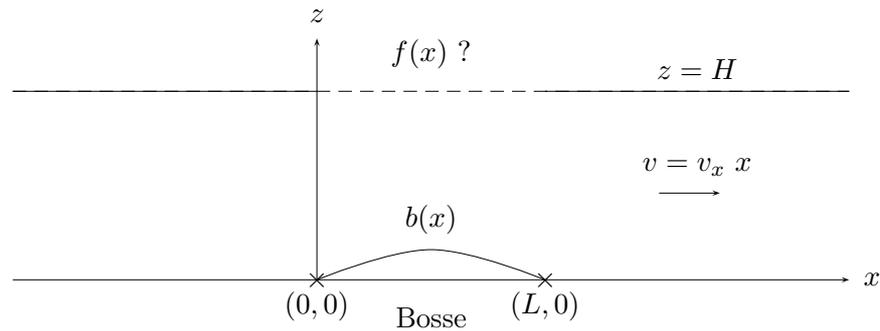


FIGURE 3.2 – Ecoulement avec variation de la côte du fond.

1. Exprimer la conservation de la masse pour  $0 \leq x \leq L$ .
2. Exprimer la conservation de l'énergie pour  $0 \leq x \leq L$ .
3. Montrer qu'en utilisant certaines approximations, la variation de la surface libre  $f(x)$  s'écrit

$$f(x) = \frac{b(x)}{1 - gH/v_x^2}.$$

4. En déduire la variation de la surface libre suivant la variation de la côte du fond.

**Exercice 26.** Un récipient hémisphérique de rayon  $R$  rempli d'un fluide incompressible présente un trou de section  $s$  à sa base (située à  $z = 0$ ).

1. Donner l'expression du rayon  $r(z)$  du rayon en fonction de l'altitude.
2. En déduire que le temps requis pour que le niveau du fluide passe de  $h_1$  à  $h_2$  est

$$t = \frac{\pi}{s} \sqrt{\frac{2}{g}} \left( \frac{1}{5} (h_2^{5/2} - h_1^{5/2}) - \frac{2}{3} R (h_2^{3/2} - h_1^{3/2}) \right).$$

**Exercice 27.** Un réservoir de section  $S$  rempli d'eau se termine par un tube horizontal de longueur  $L$  et de section  $s$  ( $\ll S$ ) situé à sa base comme illustré sur la figure 1. Le tube est fermé par un robinet que l'on ouvre à l'instant  $t = 0$ . La hauteur d'eau initiale dans le réservoir est  $h^0$  et  $h(t)$  à l'instant  $t$ . La vitesse dans le tube est notée  $v(t)$ .

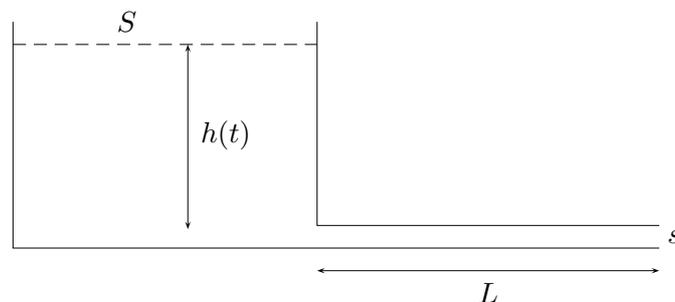


FIGURE 3.3 – Vidange d'un réservoir.

1. Pourquoi la vitesse de la surface libre du réservoir est négligeable devant  $v(t)$  ?
2. Montrer que le théorème de Bernoulli en écoulement non permanent irrotationnel s'écrit

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = C(t) \quad (3.1)$$

où  $\varphi$  est le potentiel des vitesses et  $C(t)$  une constante dépendante du temps.

3. Sous quelle hypothèse la formule de Toricelli  $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$  est-elle valable ?
4. Dans ce cas, déterminer la hauteur d'eau  $h(t)$  en fonction de  $S, s, h^0, g$  et  $t$ .
5. En déduire l'expression du temps  $T$  pour vider le réservoir.
6. Déterminer le potentiel des vitesses  $\varphi(x)$  dans le tube.
7. Montrer qu'en prenant en compte l'accélération dans le tube, on obtient l'équation différentielle non linéaire suivante

$$2L \frac{dv}{dt} = 2gh^0 - v^2. \quad (3.2)$$

8. Chercher une solution de (3.2) sous la forme  $v(t) = v_\infty \tanh(t/\tau)$  où la vitesse  $v_\infty$  et le temps  $\tau$  sont à exprimer en fonction de  $g, h^0$  et  $L$ .
9. Comparer  $T$  et  $\tau$  en supposant que  $L$  et  $h^0$  sont du même ordre de grandeur. Conclure.

*Indication : On rappelle que  $\tanh(u)' = 1 - \tanh(u)^2$ .*

### 3.3 Théorème d'Euler

**Exercice 28.** Une conduite cylindrique horizontale de section  $S$  est alimentée à partir d'un réservoir dont la surface libre est située à une hauteur  $h$  au-dessus de celle la conduite. Un convergent de section  $s$  est fixé à l'extrémité de cette conduite. La pression à la sortie du convergent est la pression atmosphérique.

1. Donner la vitesse  $V$  de l'eau à la sortie du convergent et la vitesse  $v$  dans la conduite.
2. Déterminer la pression  $p$  au début du convergent.
3. En déduire la force exercée par la fluide sur l'ensemble du convergent.

**Exercice 29.** Une hélice est mise en rotation autour d'un axe horizontal par un liquide incompressible de masse volumique  $\rho$  (figure 3.4). Les hypothèses sont les suivantes :

- l'écoulement est permanent et irrotationnel,
- l'hélice est mince,
- la gravité est négligée,
- dans une section droite, la vitesse et la pression sont uniformes,
- il y a continuité de la vitesse et discontinuité de la pression au niveau de l'hélice.

1. Donner la discontinuité de pression au niveau de l'hélice.
2. Déterminer la force exercée par le fluide sur l'hélice en fonction de  $v_1, S_1, v_2$  et  $S_2$ .
3. Exprimer la vitesse  $v$  au niveau de l'hélice en fonction de  $v_1$  et  $v_2$ .

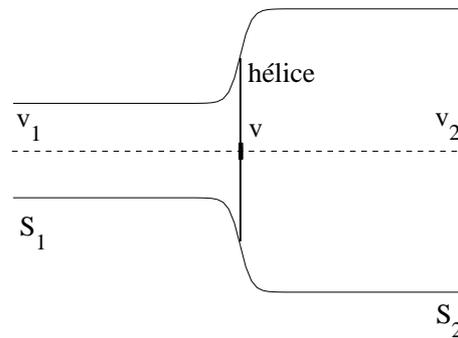


FIGURE 3.4 – Hélice en rotation.

### 3.4 Écoulements irrotationnels

**Exercice 30.** Nous considérons un écoulement de fluide parfait soumis uniquement à la gravité dont le champ de vitesse est

$$v = k \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}.$$

1. Le mouvement est-il solénoïdal ? rotationnel ?
2. Déterminer le champ de pression de cet écoulement.
3. Peut-on déterminer un potentiel des vitesses ? si oui, le calculer.
4. Peut-on déterminer une fonction de courant ? si oui, la calculer.
5. Réécrire le champ de vitesse en coordonnées cylindrique d'axe  $Oz$   
En déduire une description schématique de l'écoulement.

*Indication Q2 : Ecrire l'équation vérifiée par le champ de vitesse.*

### 3.5 Écoulements irrotationnels plans

**Exercice 31.** Nous supposons un écoulement plan irrotationnel et considérons le potentiel complexe suivant

$$f(z) = z^2.$$

Les coordonnées  $x$  et  $y$  sont supposées positives.

1. Déterminer le potentiel des vitesses  $\varphi$  et la fonction de courant  $\psi$ .
2. En déduire les lignes de courant et les dessiner.
3. Montrer que les équipotentielles et les lignes de courant sont orthogonales.
4. Donner le champ de vitesse.
5. Représenter le vecteur vitesse aux points  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ .
6. Quel est l'écoulement décrit par ce potentiel complexe ?
7. Vérifier que le mouvement est solénoïdal et irrotationnel.

**Exercice 32.** Nous supposons un écoulement plan irrotationnel et considérons le potentiel complexe suivant

$$f(z) = kz^2.$$

La coordonnée  $y$  est supposée positive.

1. Déterminer le potentiel des vitesses  $\varphi$  et la fonction de courant  $\psi$ .
2. En déduire les équations des lignes de courant et en donner l'allure.
3. Montrer que les équipotentielles et les lignes de courant sont orthogonales.
4. Donner le champ de vitesse et la dimension de la constante  $k$ .
5. L'origine est-elle un point d'arrêt ?
6. Vérifier que le mouvement est solénoïdal et irrotationnel.
7. Quel est l'écoulement décrit par ce potentiel complexe ?
8. Peut-on imposer une condition d'adhérence en  $y = 0$  ?

**Exercice 33.** On étudie les écoulements incompressibles plans dont la fonction de courant est de la forme

$$\psi(x, y) = ax^2 + by^2,$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles.

1. Calculer  $v$ ,  $\Omega$  et tracer les lignes de courant pour  $a = 0$  et  $b \neq 0$ .
2. Calculer  $v$ ,  $\Omega$  et tracer les lignes de courant pour  $a = -b$ .
3. Calculer  $v$ ,  $\Omega$  et tracer les lignes de courant pour  $a = b$ .
4. Comment traiter le cas général  $a$  et  $b$  quelconques ?

# Chapitre 4

## Fluides réels

### 4.1 Fluides newtoniens

**Exercice 34.** Nous étudions l'écoulement d'un fluide dans un canal souterrain entre deux parois poreuses. La masse volumique du fluide est notée  $\rho$  et sa viscosité dynamique est notée  $\mu$ . Les parois sont séparées d'une distance  $a$  et l'écoulement est supposé bidimensionnel plan. Le champ de vitesse est de la forme

$$v = v_x(z)e_x + v_z e_z,$$

avec  $v_z = \text{cste}$ . Le fluide est incompressible, l'écoulement est stationnaire et  $v_x(0) = v_x(a) = 0$ .

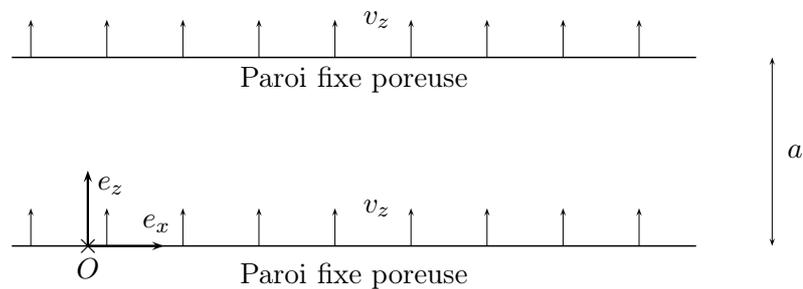


FIGURE 4.1 – Ecoulement entre deux parois poreuses.

1. Ecrire les équations de Navier–Stokes du problème.
2. Montrer que le gradient de pression est de la forme  $\nabla p = \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}$  avec  $G$  constante.
3. Montrer que  $v_x(z)$  vérifie l'équation

$$\nu \frac{d^2 v_x}{dz^2} - v_z \frac{dv_x}{dz} = \frac{G}{\rho}.$$

4. Résoudre cette équation.
5. Commenter le résultat obtenu.
6. On pose  $z^* = \frac{z}{a}$  et  $V(z^*) = \frac{\rho v_z}{G a} v_x(z)$ . Tracer la courbe  $V = f(z^*)$ ,  $0 \leq z^* \leq 1$  pour  $\frac{v_z a}{\nu} = 50$ .

**Exercice 35.** Nous souhaitons étudier un écoulement de Couette–Poiseuille dont le gradient de pression et le mouvement du plan (supérieur) ne sont pas colinéaires. Le fluide est soumis à

- un gradient de pression constant de direction  $e_p$  dans le plan horizontal ( $e_x, e_y$ ),
- une translation horizontale du plan supérieur dans la direction  $e_v$  à vitesse  $v_0$ .

Nous désignons par  $\alpha$  et  $\beta$  les angles respectifs des vecteurs  $e_v$  et  $e_p$  avec l'axe  $Ox$ . Le fluide est supposé incompressible, l'écoulement permanent et les forces de gravité sont négligées. Par ailleurs le champ de vitesse est invariant par translation suivant les axes  $Ox$  et  $Oy$ .

1. Faire un schéma en indiquant notamment les vecteurs  $e_v$  et  $e_p$ .
2. Déterminer l'expression générale du champ de vitesse.
3. Ecrire les équations vérifiées dans ce problème.
4. En posant  $\eta = \cos(\beta)x + \sin(\beta)y$ , montrer que l'on obtient les équations

$$A \cos(\beta) = \frac{dv_x^2}{dz^2} \quad \text{et} \quad A \sin(\beta) = \frac{dv_y^2}{dz^2},$$

où  $A$  est une constante à préciser (on suppose  $\frac{\partial p}{\partial \eta}$  constant).

5. En déduire le champ de vitesse.
6. Interpréter le résultat précédent. Le principe de superposition s'applique-t-il ?

## 4.2 Viscosimétrie

**Exercice 36.** Nous souhaitons mesurer la viscosité dynamique  $\mu$  d'un liquide à l'aide d'un viscosimètre de Couette représenté à la figure 4.2. Cet appareil est constitué de deux cylindres coaxiaux entre lesquels se trouve le fluide dont on souhaite déterminer la viscosité. Le cylindre extérieur est maintenu immobile par l'application d'un couple  $C$  tandis que le cylindre intérieur est mis en rotation à la vitesse constante  $\omega$ . L'espace  $e$  entre les deux cylindres est suffisamment faible devant leurs diamètres  $R_{\text{int}}$  et  $R_{\text{ext}}$  pour assimiler l'écoulement à celui entre deux plans horizontaux de manière à considérer le profil de vitesse linéaire. La viscosité de l'air est supposée négligeable devant celle du fluide.

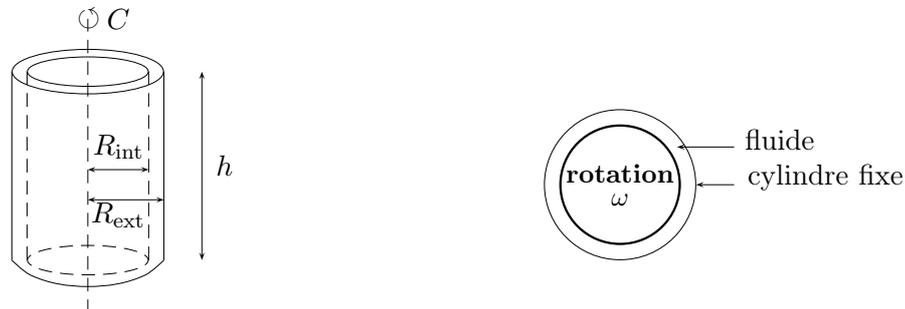


FIGURE 4.2 – Schéma de principe du viscosimètre de Couette.

1. Donner la relation entre le couple et la force tangentielle exercés sur le cylindre extérieur.
2. Donner la relation entre la contrainte tangentielle et le gradient de vitesse.
3. En déduire que l'expression littérale de la viscosité est  $\mu = C(R_{\text{ext}} - R_{\text{int}})/(2\pi h\omega R_{\text{int}} R_{\text{ext}}^2)$ .

**Exercice 37.** Nous souhaitons mesurer la viscosité dynamique  $\mu$  d'un liquide à l'aide d'un viscosimètre à chute de bille représenté à la figure 4.3. Cet appareil est constitué d'un long tube de verre rempli de liquide dans lequel on laisse tomber une bille sphérique de rayon  $r_b$  et de masse volumique  $\rho_b$ . Le mouvement de la sphère est supposé uniforme entre les points A et B. Le temps mis par la sphère pour aller de A à B est noté  $t$ . La force de frottement  $F_r$  exercée sur la bille est donnée par la loi de Stokes :  $F_r = 6\pi\mu r_b v_b$ .



FIGURE 4.3 – Schéma de principe du viscosimètre à chute de bille.

1. Ecrire le bilan des forces appliquées à la bille.
2. En déduire l'expression littérale de la viscosité.
3. Calculer la viscosité du lait sachant que  $r_b = 1\text{mm}$ ,  $\rho_b = 1050\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\rho_{\text{lait}} = 1032\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $|AB| = 30\text{cm}$  et  $t = 10\text{s}$ .

**Exercice 38.** Nous souhaitons mesurer la viscosité dynamique  $\mu$  d'un liquide à l'aide d'un viscosimètre capillaire représenté à la figure 4.4. Cet appareil est constitué d'un large récipient fixé sur un support et contenant le liquide à étudier. Ce récipient présente à sa base un orifice permettant l'écoulement du liquide à travers un tube très fin de diamètre  $d$  de sorte que le régime soit permanent et laminaire. Une éprouvette jaugée permettant de recueillir  $50\text{mL}$  de liquide est placée sous ce tube. La hauteur de liquide  $h$  dans le récipient large peut être supposée constante pendant la mesure. Nous considérons un fluide  $i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) de masse volumique  $\rho_i$ , de viscosité cinématique  $\nu_i$  et dont le temps de remplissage de l'éprouvette est  $t_i$ .

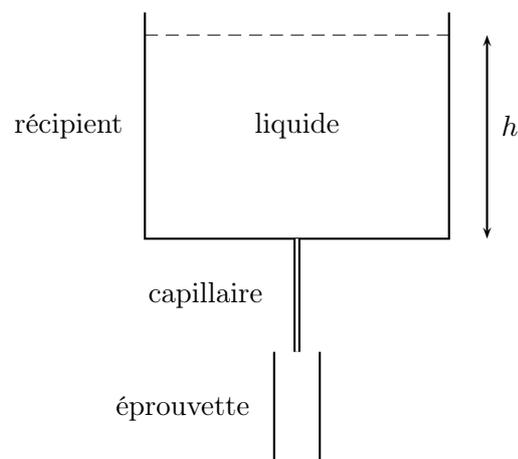


FIGURE 4.4 – Schéma de principe du Viscosimètre capillaire.

1. Pourquoi le régime peut-il être supposé permanent ?
2. Montrer que l'égalité  $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$  conduit à la relation  $t_1/\mu_1 = t_2/\mu_2$ .
3. Calculer la viscosité d'un liquide dont le temps de remplissage de l'éprouvette est 700s.
4. Déterminer le débit volumique  $Q_v$  et la vitesse  $v$  dans le cas de l'eau.
  - AN avec l'eau ( $i = 1$ ) et l'acétone ( $i = 2$ ) de viscosités dynamiques  $\mu_1 = 10^{-3} Pa \cdot s$  et  $\mu_2 = 0.31 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$ , et de temps de remplissage  $t_1 = 120 s$  et  $t_2 = 37 s$ ,  $d = 0.5mm$ .

*Indication : Le débit volumique  $Q_v$  pour un fluide newtonien de viscosité dynamique  $\mu$  en écoulement laminaire dans une conduite cylindrique de rayon  $R$  et de longueur  $L$  est égal à  $\pi R^4 \delta p / (8\mu L)$  où  $\delta p$  désigne la perte de charge dans la conduite.*

**Exercice 39.** Nous souhaitons mesurer la viscosité dynamique  $\mu$  d'une huile en la faisant couler dans un tube horizontal de diamètre  $D$  avec un débit volumique  $Q$ . Deux tubes manométriques verticaux, placés sur la conduite et espacés d'une longueur  $L$ , indiquent une dénivellation  $\delta h$  de l'huile. L'écoulement est laminaire.

1. Donner l'expression de la viscosité dynamique de l'huile. AN.
2. L'hypothèse initiale est-elle correcte ?
  - AN avec  $D = 7mm$ ,  $Q = 4 \cdot 10^{-6} m^3 \cdot s^{-1}$ ,  $L = 60cm$ ,  $\delta h = 267mm$  et  $\rho = 910kg \cdot m^{-3}$ .

**Exercice 40.** Pour mesurer la viscosité cinématique d'une huile, nous considérons un écoulement de Poiseuille dans un tube de rayon  $R$ , de longueur  $L$  et incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontal. La pression statique est supposée constante dans le tube.

1. Déterminer le gradient de pression dans le tube.
2. Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement.
3. En déduire la viscosité cinématique de l'huile.
  - AN avec  $R = 6mm$ ,  $\sin(\alpha) = 0.0445$  et  $Q = 20l \cdot h^{-1}$ .

*Indication : la vitesse dans un écoulement soumis à une différence de pression  $\delta p$  dans une conduite circulaire de rayon  $R$  et de longueur  $L$  est  $v(r) = \delta p(R^2 - r^2)/(4\mu L)$  où  $r$  désigne la distance par rapport à l'axe de la conduite et  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide.*

### 4.3 Pertes de Charges

**Exercice 41.** Un tube de diamètre  $D$  et de rugosité  $\epsilon$  transporte de l'eau avec un débit  $Q$ .

1. Rappeler l'expression de la chute linéique de pression (en fonction de  $D, \mu, Q$ ) pour un écoulement laminaire dans une conduite cylindrique. AN.
2. Calculer le nombre de Reynolds. L'écoulement est-il laminaire ?
3. Si l'écoulement est turbulent, donner la nouvelle chute linéique de pression.
  - AN avec  $D = 5mm$ ,  $\epsilon = 0.1mm$ ,  $\mu = 10^{-3} Pa \cdot s$  et  $Q = 20cm^3 \cdot s^{-1}$ .

**Exercice 42.** Une huile de pétrole s'écoule à une vitesse moyenne  $v$  dans une conduite cylindrique horizontale de diamètre  $D$ . La viscosité de cette huile est  $\mu_h$  et sa masse volumique  $\rho_h$ .

1. Quel est le type d'écoulement ?
2. Déterminer la perte de charge par mètre, en hauteur d'huile et en hauteur d'eau. AN.
3. En déduire la puissance absorbée pour propulser cette huile sur  $L = 80m$ . AN.
  - AN avec  $D = 20cm$ ,  $v = 2.25m \cdot s^{-1}$ ,  $\mu_h = 0.45Pa \cdot s$  et  $\rho_h = 900kg \cdot m^{-3}$ .

**Exercice 43.** Un pipe-line de diamètre intérieur  $D$  transporte du pétrole brut de viscosité dynamique  $\mu$  et de masse volumique  $\rho$  avec un débit massique  $Q_m$ . Des stations de pompage sont régulièrement réparties le long de la conduite : chaque pompe, actionnée par un moteur de rendement  $\eta$ , augmente la pression de  $\delta p$ .

1. Quel est le type d'écoulement ?
2. Calculer la distance maximale entre deux stations de pompage.
3. Calculer la puissance de chaque moteur.
  - AN avec  $D = 50\text{cm}$ ,  $\mu = 0.27\text{Pa} \cdot \text{s}$ ,  $\rho = 900\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $Q_m = 350\text{t} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $\eta = 75\%$  et  $\delta p = 4.5 \cdot 10^5\text{Pa}$ .

**Exercice 44.** On transvase du lait d'un camion citerne dans un réservoir de stockage avec une pompe de débit  $Q$ . La conduite d'alimentation a une longueur  $L$ , un diamètre  $D$ , une rugosité  $\epsilon$  et comporte un robinet ainsi que quatre coudes arrondis d'angle  $\alpha$  et de rayon de courbure  $r_c$ . Les expressions des pertes de charge du robinet et d'un coude sont

$$k_{\text{robinet}} = 0.1 \quad \text{et} \quad k_{\text{coude}} = \frac{\alpha}{90} \left( 0.13 + 1.85 (D/2r_c)^{3.5} \right).$$

1. Calculer la perte de charge linéaire de ce dispositif.
2. Calculer chaque perte de charge singulière.
3. En déduire la perte de charge totale (exprimée en  $m$  puis en  $\text{Pa}$ ) dans la conduite.
  - AN avec  $\rho_{\text{lait}} = 1032\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\nu_{\text{lait}} = 1.93 \cdot 10^{-6}\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $Q = 340\text{L} \cdot \text{min}^{-1}$ ,  $L = 25\text{m}$ ,  $D = 6\text{cm}$ ,  $\epsilon = 0.06\text{mm}$ ,  $\alpha = 90^\circ$  et  $r_c = 12\text{cm}$ .

**Exercice 45.** La formule de Colebrook est une relation entre le coefficient de perte de charge  $\lambda$ , le nombre de Reynolds  $Re$ , la rugosité absolue  $\epsilon$  et le diamètre intérieur  $D$  d'une conduite,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3.7D} \right).$$

Un réseau de distribution d'eau est assuré par une conduite en acier inoxydable de diamètre extérieur  $d_e$  et d'épaisseur  $e$  dont le débit est  $Q$ .

1. Comment se simplifie la formule de Colebrook lorsque la conduite est lisse ?
2. Donner la pression dynamique (*i.e.* engendrée par le champ de vitesse) de l'écoulement.
3. Calculer  $\lambda$  par itérations successives (méthode de point fixe) avec  $\lambda^{(0)} = 10^{-2}$ .
4. Donner le coefficient de perte de charge en utilisant le diagramme de Moody lorsque

$$\frac{\epsilon}{3.7D} = \frac{1}{10} \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}}$$

5. L'hypothèse de conduite lisse est-elle valable ?
  - AN avec  $d_e = 6,3\text{cm}$ ,  $e = 3,2\text{mm}$  et  $Q = 15\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ .

*Indication Q3 : on s'arrêtera lorsque  $|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k+1)}| < 10^{-3}$ .*

**Exercice 46.** Avant de la mettre en eau, nous souhaitons prévoir les pertes de charges dans une galerie d'aménagement hydroélectrique de diamètre  $D$ , ayant une rugosité de paroi  $\epsilon$ . Pour cela nous mesurons les pertes de charges dues à un écoulement d'air soufflé dans la même galerie. Cette mesure produit une perte de charge  $\delta p$ .

1. Rappeler l'expression de perte de charge linéaire.
2. Déterminer la perte de charge de la galerie en exploitation.
  - AN avec  $\rho_{\text{air}} = 1.25 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\nu_{\text{air}} = 15.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ,  $\nu_{\text{eau}} = 1.15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  et  $\delta p = 12 \cdot 10^{-6} \text{ bar}$ .

**Exercice 47.** Nous souhaitons étudier l'effet d'un pontage sur une artère de rayon normal  $r_0$  partiellement obstruée sur une longueur  $l$  où le rayon est réduit à  $r$  (Fig 4.5.a). La greffe d'une portion d'artère de rayon  $r_p$  sur une longueur  $L_p$  est réalisée entre deux points situés de part et d'autre de l'étranglement et distants de  $L$  (Fig 4.5.b). Le régime est stationnaire et nous supposons que  $L = 2l$  et  $r_0 = 2r$ . On appelle *résistance hydraulique*  $R_h$ , le coefficient de proportionnalité reliant la chute de pression  $\delta p$  et le débit  $Q$ , c'est-à-dire que  $\delta p = R_h Q$ .

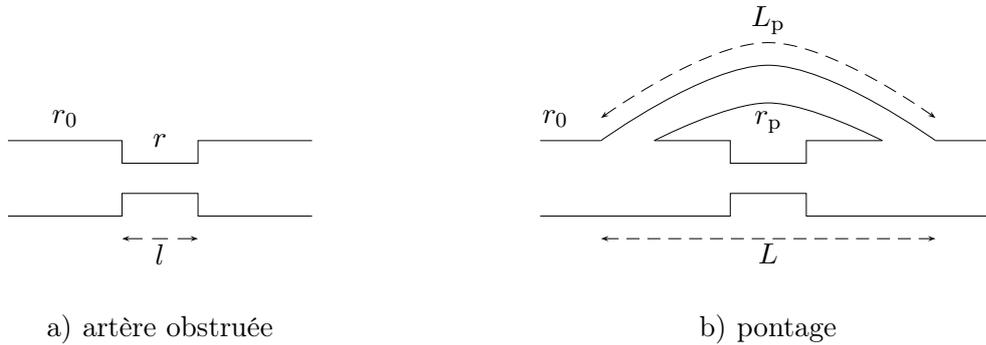


FIGURE 4.5 – Schéma de principe de réparation d'une artère obstruée par un pontage.

1. Que désigne  $\mu$ ? Quelle est son unité?
2. Donner les vitesses moyenne et maximale dans cet écoulement.
3. Montrer que la résistance hydraulique de l'artère obstruée de longueur  $L$  et avant le pontage s'écrit

$$R_h = R_{h0} \left( 1 - \frac{l}{L} + \frac{l}{L} \left( \frac{r_0}{r} \right)^4 \right),$$

où  $R_{h0}$  est la résistance hydraulique d'une artère saine de longueur  $L$ .

4. Déterminer le rapport du débit sanguin  $Q$  d'une artère obstruée avant pontage et du débit  $Q_0$  d'une artère saine, en supposant que la chute de pression restante constante. AN.
5. Exprimer la résistance  $R_{hp}$  du pontage en fonction de  $R_{h0}$  pour que le débit de l'artère obstruée et du pontage soit égal au débit  $Q_0$  de la portion d'artère saine.
6. En déduire la fraction du débit sanguin passant par le pontage.

*Indication : la vitesse dans un écoulement soumis à une différence de pression  $\delta p$  dans une conduite circulaire de rayon  $R$  et de longueur  $L$  est  $v(r) = \delta p(R^2 - r^2)/(4\mu L)$  où  $r$  désigne la distance par rapport à l'axe de la conduite.*

## 4.4 Théorème de Bernoulli généralisé

**Exercice 48.** On étudie le circuit hydraulique de la figure 4.6 en prenant en compte les pertes de charges régulières et singulières. Les vitesses du fluide à la surface libre du bassin d'aspiration et du bassin de refoulement sont supposées très faibles.

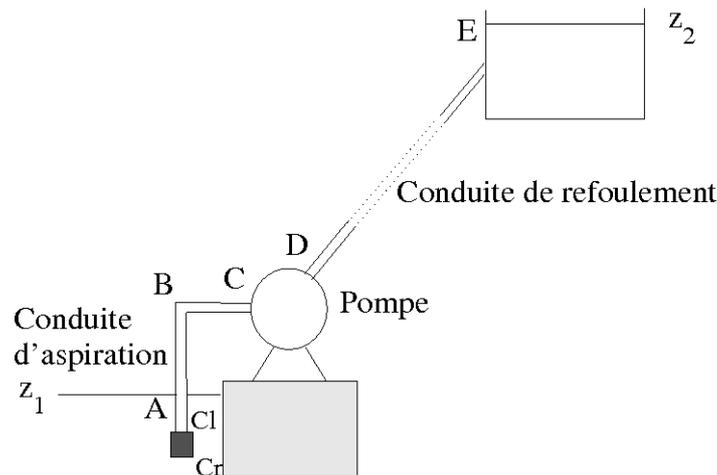


FIGURE 4.6 – Schéma du circuit hydraulique.

1. Calculer les coefficients de pertes de charges régulières.
2. Déterminer la charge que la pompe doit fournir pour élever l'eau.
3. En déduire la puissance minimale de la pompe.
4. Tracer à l'échelle le diagramme de charge du circuit lorsque le fonctionnement de la pompe est minimal en supposant que  $l_{ACr} = 2m$ ,  $l_{CrCl} = 0$  et  $l_{ClB} = 10m$ .

Les données sont

- conduite d'aspiration : longueur  $l_a = 15m$  et diamètre  $d_a = 125mm$ ,
- conduite de refoulement : longueur  $l_r = 925m$  et diamètre  $d_r = 80mm$ ,
- rugosité :  $\epsilon = 0.1mm$ ,
- coefficients de pertes de charges : crépine ( $C_r$ )  $k_1 = 3$ , clapet ( $Cl$ ) :  $k_2 = 1.2$ , coude ( $B$ )  $k_3 = 0.134$ , élargissement brusque ( $E$ ) :  $k_4 = 1$ ,
- viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6}m^2.s$ ,
- débit volumique  $q_v = 10l.s^{-1}$ ,
- hauteurs d'eau :  $z_1 = 5m$  et  $z_2 = 45m$ .

**Exercice 49.** On étudie le circuit hydraulique de la figure 4.7 en prenant en compte les pertes de charges régulières et singulières. La vitesse est négligeable au niveau de la surface libre (point 0) et la pression de sortie  $P_s$  vaut  $1bar$ .

1. Calculer les coefficients de pertes de charges régulières.
2. En déduire la pression  $p_0$  dans le réservoir.
3. Tracer le diagramme de charge du circuit.

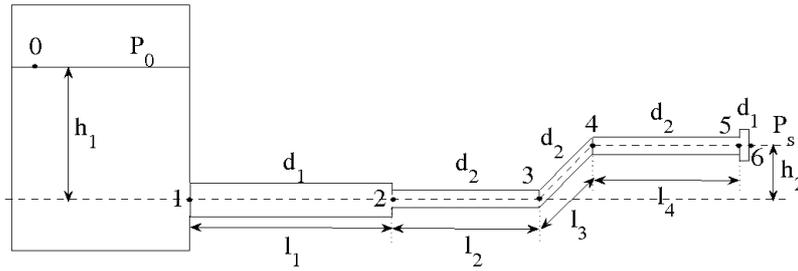


FIGURE 4.7 – Schéma de principe de circuit hydraulique.

Les données sont

- longueurs :  $l_1 = 35m$ ,  $l_2 = 25m$ ,  $l_3 = 13m$  et  $l_4 = 25m$ ,
- diamètres :  $d_1 = 80mm$  et  $d_2 = 60mm$ ,
- rugosité :  $\epsilon = 0.04mm$ ,
- coefficients de pertes de charges : raccordement d'un réservoir avec une conduite  $k_1 = 0.5$ ,  
ajutage  $k_2 = 0.05$ , coudes  $k_3 = k_4 = 0.31$ , diffuseur  $k_5 = 0.3$ ,
- viscosité cinématique de l'eau  $\nu = 10^{-6}m^2.s$ ,
- débit volumique  $q_v = 8l.s^{-1}$ ,
- hauteurs d'eau :  $h_1 = 25m$  et  $h_2 = 5m$ .

**Exercice 50.** On étudie le circuit primaire d'une centrale nucléaire dans lequel de l'eau sous pression circule en circuit fermé représenté à la figure 4.8. Cette eau s'échauffe lors de son passage dans le cœur du réacteur grâce à l'énergie produite par les différents éléments combustibles. Cette énergie calorifique, transportée par l'eau sous pression, est utilisée *via* l'échangeur, par le circuit secondaire (non représenté) pour produire de l'énergie électrique. Les points du circuit sont à la même altitude.

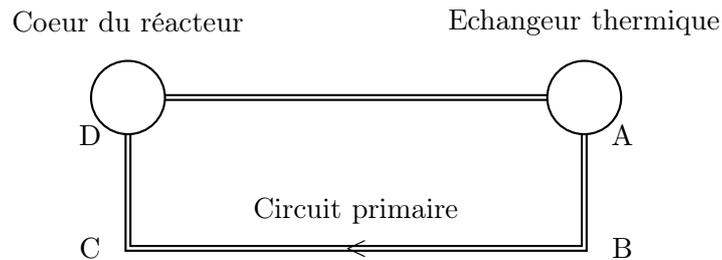


FIGURE 4.8 – Schéma de principe de circuit hydraulique.

1. Calculer le coefficient de pertes de charges régulières.
2. Quel est le type d'écoulement ?
3. Calculer la variation de pression entre les points A et D.
4. Tracer le diagramme de charge du circuit.

Les données sont

- longueurs :  $l_{AB} = l_{CD} = 2m$  et  $l_{BC} = 5m$ , diamètre :  $d = 60cm$ , rugosité :  $\epsilon = 0.06mm$ ,
- pertes de charges de chaque coude :  $1m$ .
- viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6}m^2.s$ , débit  $q_m = 13.2 \cdot 10^3 kg.s^{-1}$ .

**Exercice 51.** Une pompe  $p$  de puissance  $\mathcal{P}$  remonte de l'eau d'un bassin vers un réservoir à travers une conduite comme indiqué sur le schéma de l'installation.  $L$  et  $D$  désignent la longueur (du bassin à la pompe et de la pompe au réservoir) et le diamètre de la conduite circulaire,  $v$  est la vitesse de l'eau dans la conduite et  $\mu$  est la viscosité dynamique de l'eau. Les pertes de charge singulières sont négligées.

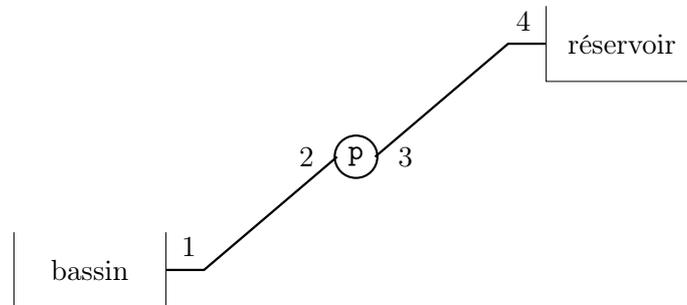


FIGURE 4.9 – Schéma de principe de circuit hydraulique.

1. Quel est le régime d'écoulement ?
  2. Quelle est la relation entre  $\mathcal{P}$ ,  $Q$  et la différence de pression  $\delta p_{\mathcal{P}}$  entre la sortie et l'entrée de la pompe ?
  3. Calculer les pertes de charge linéaire entre le bassin et le réservoir. AN.
  4. Calculer le coefficient de perte de charge linéaire dans la conduite. AN.
- AN avec  $\mathcal{P} = 36kW$ ,  $D = 135mm$ ,  $v = 6m \cdot s^{-1}$ ,  $\mu = 10^{-3}Pas$ ,  $L = 65m$ ,  $p_1 = p_4 = 1013mbar$ ,  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = z_3 = 20m$  et  $z_4 = 35m$ .

**Exercice 52.** On souhaite effectuer la vidange partielle d'une citerne de section  $S$  destinée au transport d'eau. Un tuyau cylindrique de diamètre  $d$  constant plonge pratiquement jusqu'au fond de la citerne au point A, remonte en un point B où il est suspendu à une potence puis débouche à l'air libre au point C situé au-dessus de la cuve de vidange de section  $s$ . Les points D et D' sont situés au niveau de la surface libre de la citerne. La quantité  $\tilde{h}$  désigne la hauteur finale dans la cuve à la fin de la vidange partielle. Il y a risque de cavitation dans une canalisation lorsque la pression de l'écoulement atteint la pression de vapeur saturante du fluide qui circule.

**Le fluide est supposé parfait.**

1. Donner une estimation de la vitesse du fluide au point C en supposant que la surface libre de la citerne est immobile. AN.
2. Exprimer la hauteur maximale du point B pour éviter le risque de cavitation. AN.
3. La surface libre de la citerne est désormais mobile. On désigne par  $z(t)$  la cote de la surface libre à l'instant  $t$ . Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $z$ .
4. En déduire le temps de vidange du réservoir en fonction de  $s, S, h, \tilde{h}, d, g$  et  $z_C$ . AN.

**Le fluide est supposé réel.**

5. Calculer la perte de charge linéaire de A à C.
6. Calculer la somme des pertes de charges singulières de A à C.
7. Tracer le diagramme de charge en indiquant la charge aux points A,  $C^1$ ,  $C^2$  et C. Les points  $C^1$  et  $C^2$  se situent au niveau du premier et second coude. La charge est nulle en C.

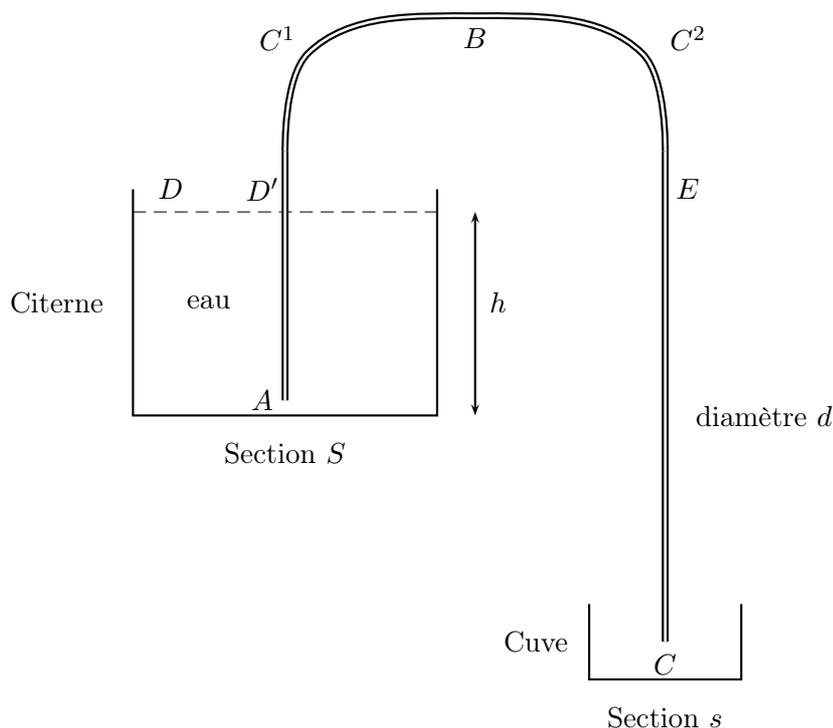


FIGURE 4.10 – Schéma de principe.

- Données :
- viscosité cinématique de l'eau :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
  - pression de vapeur saturante de l'eau à  $20^\circ\text{C}$  :  $p_{vs} = 2500 \text{ Pa}$
  - altitudes des points :  $z_A = 1.15\text{m}$ ,  $z_C = -5\text{m}$  et  $z_D = z_{D'} = z_E = 3.5\text{m}$
  - hauteur initiale dans la citerne  $h = 3.5\text{m}$
  - hauteur initiale dans la citerne  $\tilde{h} = 6\text{m}$
  - sections :  $S = 39\text{m}^2$  et  $s = 5\text{m}^2$
  - diamètre du tuyau :  $d = 10\text{cm}$
  - rugosité du tuyau :  $\epsilon = 10^{-2}\text{mm}$
  - longueurs :  $l_{D'E} = 15\text{m}$ ,  $l_{D'C^1} = l_{E C^2} = 2.5\text{m}$ ,
  - coefficient de perte de charge en A : 4.4 et pour un coude : 0.2
  - débit :  $Q = 3.14 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Indications Q3 :

- utiliser la conservation de la masse,
- exprimer la variation de la côte de la surface libre  $dz$  en fonction du temps  $dt$ .

**Exercice 53.** Nous souhaitons perfuser un patient pendant une durée  $T$  avec un flacon de volume  $V$  contenant un fluide de masse volumique  $\rho$  et de viscosité dynamique  $\mu$ . La surpression veineuse du patient est  $h_m$  cm de mercure. La masse volumique du mercure est notée  $\rho_m$ . Deux tubes sont reliés au flacon. L'un comporte à son extrémité une aiguille de longueur  $l$  et de diamètre intérieur  $d$ . L'extrémité libre de l'autre tube est à la pression atmosphérique.

1. Donner l'expression de la résistance hydraulique  $R_h$  d'un écoulement de Poiseuille dans une conduite circulaire.
2. Quel est le régime d'écoulement ?

3. Calculer la résistance hydraulique puis la chute de pression dans l'aiguille.
4. Calculer l'énergie cinétique volumique dans l'aiguille. Conclure.
5. A quelle hauteur doit-on installer le flacon ?
  - AN avec  $T = 4h$ ,  $V = 500mL$ ,  $\rho = 1.1g \cdot cm^{-3}$ ,  $\mu = 2 \cdot 10^{-3}Pa \cdot s$ ,  $h_m = 4cm$ ,  $\rho_m = 13.6g \cdot cm^3$ ,  $l = 3cm$  et  $d = 0.4mm$ .

*Indication : la vitesse dans un écoulement soumis à une différence de pression  $\delta p$  dans une conduite circulaire de rayon  $R$  et de longueur  $L$  est  $v(r) = \delta p(R^2 - r^2)/(4\mu L)$  où  $r$  désigne la distance par rapport à l'axe de la conduite.*

**Exercice 54.** Nous souhaitons étudier la remontée d'une bulle de gaz parfait formée dans la lave de la chambre magmatique d'un volcan. La cheminée du volcan est assimilée à une conduite cylindrique verticale et la lave est considérée comme un fluide incompressible homogène de masse volumique  $\rho$  et de viscosité dynamique  $\mu$ . Une bulle de gaz de rayon  $R(-h)$  se forme à l'altitude  $-h$  à l'instant initial et remonte à la surface de la Terre où son rayon est  $R_0$ . La quantité de gaz dans la bulle est supposée constante et la pression moyenne de la bulle est la pression de la lave. Le poids et l'accélération de la bulle sont négligés et la force de frottement  $F_f$  exercée par la lave est modélisée par la loi de Stokes dont l'expression est

$$\vec{F}_f = -6\pi\mu R\vec{v}.$$

Nous considérons que l'altitude nulle correspond à la surface de la Terre où s'exerce la pression atmosphérique  $p_0$ .

1. Déterminer le champ de pression en supposant que la lave est en équilibre.
2. Donner le rayon de la bulle  $R(z)$  à l'altitude  $z$  en fonction de  $R_0, p_0, \rho, g$  et  $z$ .
3. Ecrire l'équilibre des forces s'exerçant sur la bulle. En déduire l'expression de  $\frac{dz}{dt}$ .
4. En déduire la durée d'ascension de la bulle.
  - AN avec  $\rho = 3000kg \cdot m^{-3}$ ,  $\mu = 10^4Pa \cdot s$ ,  $p_0 = 10^5Pa$ ,  $R_0 = 50cm$  et  $h = 1km$ .

## 4.5 Similitude - Analyse dimensionnelle

**Exercice 55.** En aérodynamique et hydrodynamique, la force de traînée, notée  $F_x$ , d'un objet représente la force de frottement exercée par le fluide sur cet objet. Cette force dépend d'un coefficient de traînée  $C_x$  et vérifie la relation

$$F_x = \frac{1}{2}\rho C_x V^2 L^2$$

On fait l'hypothèse que le coefficient de traînée  $C_x$  s'exerçant sur un navire ne dépend que du nombre de Froude  $F_r$  et du nombre de Reynolds  $R_e$

$$C_x = f(F_r, R_e)$$

Un bassin expérimental vous propose de construire un modèle réduit à l'échelle 1/10 du navire que vous souhaitez réaliser.

1. Déterminer les échelles de vitesses selon les deux grandeurs adimensionnelles.
2. Peut-on déduire le coefficient de traînée réel à partir de l'étude sur la maquette ?

**Exercice 56.** Un bateau a une surface mouillée  $S$  de  $5000m^2$  quand il avance à une vitesse de  $15m \cdot s^{-1}$ . Nous testons dans un bassin rempli d'eau, une maquette de ce bateau à une échelle  $1/40$ . La résistance due aux vagues  $\mathcal{R}_w$  et la résistance visqueuse  $\mathcal{R}_v$  sont définies par

$$\mathcal{R}_w = C_x \rho S v^2 / 2 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_v = f S v^n,$$

où  $C_x$  est le coefficient de trainée,  $\rho$  la masse volumique et  $v$  la vitesse. Nous avons  $f = 1.6$  et  $n = 1.85$  pour le bateau ainsi que  $f = 1.7$  et  $n = 1.9$  pour la maquette.

1. Quelle doit être la vitesse de la maquette ?
2. Donner le rapport des résistances dues aux vagues.
3. Calculer les deux résistances visqueuses.
4. En déduire la résistance totale sur le bateau si la résistance de la maquette est 40N.

**Exercice 57.** Nous disposons d'une soufflerie dont la veine d'essai est à section carrée de  $10m$  de côté et la vitesse de l'air est  $70m \cdot s^{-1}$ . Nous souhaitons réaliser un essai aérodynamique en plaçant dans cette veine la maquette d'un Airbus A340 d'envergure  $60m$  et dont la vitesse de croisière est transsonique de nombre de Mach 0.8 à une altitude où la température est de  $-45^\circ C$ . Nous précisons que le nombre de Mach est défini par

$$M_a = \frac{v}{c},$$

où  $v$  est la vitesse de l'objet et  $c$  la célérité du son défini par  $c = \sqrt{\gamma RT}$  pour un gaz parfait. L'air est assimilé à un gaz parfait et nous considérons les valeurs suivantes

$$\nu = 1.410^{-5} m^2 \cdot s^{-1}, \quad \gamma = 1.4, \quad R = 287 J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}.$$

La viscosité cinématique de l'air est identique dans la soufflerie et à l'altitude de croisière.

1. Donner le nombre de Mach accessible dans la soufflerie à température ambiante.
2. Quelle doit-être la température de la soufflerie pour respecter la similitude de Mach ?
3. Quel est le facteur d'échelle requis pour respecter la similitude de Reynolds ?

Nous choisissons une maquette de  $4m$  d'envergure.

4. Quel est le nombre de Reynolds maximal accessible pour cet essai ?  
Comparer avec celui de l'avion de vol en croisière.

**Exercice 58.** Un modèle réduit destiné à l'étude des marées est construit en adoptant l'échelle  $e_p$  en plan et  $e_h$  en hauteur. La période moyenne d'une marée est de  $12h25$  et nous souhaitons estimer cette durée sur le modèle réduit. Les applications numériques se feront pour les deux modèles suivants :

$$(e_p, e_h) = (1/500, 1/80), \quad \text{et} \quad (e_p, e_h) = (1/50000, 1/500).$$

Soient  $L, H$  et  $T$ , une dimension horizontale, la dimension verticale et le temps caractéristiques.

1. Quelle composante de la vitesse est négligeable ? Justifier  
Donner une valeur caractéristique des composantes prépondérantes.
2. Quel nombre sans dimension faut-il conserver ?  
En déduire l'expression de la période d'une marée sur la maquette.
3. Application numérique pour chaque modèle.

**Exercice 59.** La conservation de l'énergie (sans puissance mécanique) dans un fluide s'écrit

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e v) = r - \operatorname{div}(q).$$

où  $e$  désigne l'énergie massique,  $r$  la puissance calorifique et  $q$  le flux thermique.

1. Donner les hypothèses permettant de reformuler l'équation d'énergie sous la forme

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p v \cdot \nabla T = r + \operatorname{div}(\lambda \nabla T), \quad (4.1)$$

où  $c_p$  représente la capacité thermique massique,  $T$  la température et  $\lambda$  la conductivité thermique.

2. Donner les unités indépendantes intervenant dans (4.1).  
Combien de nombres sans dimension peut-on former ?
3. Ecrire la forme adimensionnelle de (4.1).
4. Expliciter les nombres sans dimension en faisant apparaître le coefficient 1 devant le terme advectif.



# Chapitre 5

## Ecoulements turbulents

**Exercice 60.** Soit une grandeur  $T$  (Température ou concentration d'un polluant) non uniforme dans l'espace, transportée par un écoulement turbulent incompressible ayant une vitesse  $v$ . L'équation d'évolution de  $T$  est donnée par

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T = D \Delta T.$$

dans laquelle le coefficient  $D$  est la diffusivité. On rappelle que la décomposition de Reynolds d'une quantité  $q$  consiste à l'écrire comme la somme d'une valeur moyenne  $\bar{q}$  et d'une valeur fluctuante  $q'$  (ayant une valeur moyenne nulle) :

$$q = \bar{q} + q'.$$

1. Quelle est l'unité de la diffusivité  $D$  ?
2. Réécrire l'équation précédente en appliquant la décomposition de Reynolds à  $T$  et  $v$ .

Un terme inconnu apparaît dans l'équation d'évolution de la valeur moyenne de  $T$ .

3. Par analogie avec le modèle de viscosité turbulente, proposer une modélisation du terme inconnu.

**Exercice 61.** Le profil de vitesse pour un écoulement turbulent dans une conduite lisse est donné par les quantités adimensionnelles  $u^+$  et  $y^+$  :

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{si } 0 \leq y^+ \leq 5 \\ 5 \ln(y^+) - 3.05 & \text{si } 5 \leq y^+ \leq 30 \\ 2.5 \ln(y^+) + 5.5 & \text{si } y^+ \geq 30 \end{cases}$$

avec  $u^+ = \frac{u}{\sqrt{\tau_p/\rho}}$  et  $y^+ = \frac{y\sqrt{\tau_p/\rho}}{\nu}$  où  $u$  est la vitesse réelle et  $y$  la distance à la paroi.

Nous considérons un écoulement d'eau avec une vitesse moyenne de  $10m \cdot s^{-1}$  dans une conduite lisse de diamètre  $D = 10cm$ . La viscosité cinématique de l'eau est  $\nu = 10^{-6}m^2 \cdot s^{-1}$ .

1. Rappeler la relation entre la contrainte pariétale et le coefficient de perte de charge linéaire.
2. Calculer l'épaisseur de la sous-couche visqueuse (*i.e.* vérifiant  $y^+ = 5$ ).
3. Ecrire le profil de vitesse  $u(y)$ .
4. Quelles sont les valeurs de la vitesse à la fin de la sous-couche visqueuse et au centre de la conduite ?

**Exercice 62.** Une description statistique de la turbulence conduit à l'équation de Reynolds,

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} = \bar{F} + \nu \Delta \bar{v} - \operatorname{div}(\overline{v' \otimes v'}).$$

1. Que représentent  $\bar{v}$  et  $v'$  ?
2. Montrer que la pression vérifie  $-\frac{1}{\rho} \Delta \bar{p} = \operatorname{div}(\bar{v} \cdot \nabla \bar{v}) - \operatorname{div}(\bar{F}) + \operatorname{div}(\operatorname{div}(\overline{v' \otimes v'}))$ .

La vorticité  $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rot}(v)$  d'un écoulement incompressible vérifie l'équation suivante

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla v + \nu \Delta \omega.$$

3. Montrer que la vorticité vérifie  $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{\omega} = \bar{\omega} \cdot \nabla \bar{v} + \nu \Delta \bar{\omega} + \operatorname{div}(\overline{v' \otimes \omega'} - \overline{\omega' \otimes v'})$ .

**Exercice 63.** Nous considérons un écoulement d'eau de débit  $Q$  dans une conduite cylindrique horizontale de diamètre  $D$ , de longueur  $L$  et de rugosité  $\epsilon$ . Le profil de vitesse est défini par

$$v(r) = 1.24 \bar{v} \left( \frac{2r}{D} \right)^{\frac{1}{7}},$$

où  $\bar{v}$  désigne la vitesse moyenne et  $r$  la distance à la paroi.

1. Quel est le type d'écoulement ?
2. Calculer la vitesse pour des points à 1, 2.5, 5 et 7.5 cm de la paroi.  
Tracer le profil de vitesse. Est-il cohérent avec le résultat de la question 1 ?
3. Déterminer le coefficient de perte de charge linéaire de cet écoulement.
4. Calculer la perte de charge linéaire.  
– AN avec  $Q = 20 L \cdot s^{-1}$ ,  $D = 15 \text{ cm}$ ,  $L = 1 \text{ km}$ ,  $\epsilon = 0.24 \text{ mm}$  et  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot s^{-1}$ .

# Chapitre 6

## Ecoulements à surface libre

**Exercice 64.** On considère un canal de section droite rectangulaire de largeur  $l$ , de hauteur d'eau  $h$  et de pente constante  $I$ . Le coefficient de Strickler du canal est noté  $\mathcal{K}_s$ .

1. Quel est le débit  $Q$  pour un écoulement uniforme dans ce canal ?
2. Calculer la profondeur critique  $h_c$  pour le débit  $Q$ .
3. En déduire la nature de l'écoulement (fluvial ou torrentiel).

Ce canal comporte un rétrécissement au bout duquel la largeur devient  $l' = 1.3m$ . On suppose qu'il n'y a pas de pertes de charges à cet endroit c'est-à-dire que le rétrécissement est progressif.

4. Comment évolue la ligne d'eau à travers ce rétrécissement progressif ?
5. Calculer la hauteur d'eau  $h'$  à l'aval du rétrécissement pour le débit  $Q$ .
  - AN avec  $l = 2m$ ,  $h = 0.5m$ ,  $I = 5 \cdot 10^{-4}$  et  $\mathcal{K}_s = 40m^{1/3} \cdot s^{-1}$ .

**Exercice 65.** Un écoulement d'eau en régime permanent uniforme se fait dans un canal trapézoïdal de largeur à la base  $l$  et dont les parois sont inclinées d'un angle  $\alpha$ . La hauteur d'eau est notée  $h$  et la rugosité du lit est décrite par la relation de Manning–Strickler dont le coefficient est noté  $\mathcal{K}_s$ .

1. Calculer la section de l'écoulement.
2. Déterminer la pente pour que le débit soit égal à  $100m^3 \cdot s^{-1}$
3. Donner les équations permettant d'obtenir la hauteur critique et la hauteur normale.
4. Calculer le nombre de Froude. En déduire le type d'écoulement.
  - AN avec  $l = 5m$ ,  $h = 4m$ ,  $\alpha = 45^\circ$  et  $\mathcal{K}_s = 40m^{1/3} \cdot s^{-1}$ .

**Exercice 66.** Soit un canal rectiligne de section rectangulaire de largeur  $l$ , de hauteur d'eau  $h$ . La vitesse d'écoulement est supposée uniforme égale à  $v$ . Les quantités  $l$ ,  $h$  et  $v$  varient le long du canal mais sur de très grandes distances caractéristiques. L'eau est assimilée à un fluide parfait homogène, incompressible et l'écoulement est permanent.

1. Exprimer le débit volumique  $Q$  à travers une section du canal. Que sait-on de  $Q$  ?
2. Montrer que la quantité  $h + v^2/2g$  est une constante que l'on notera  $h_s$ .
3. Exprimer  $Q$  en fonction de  $h$ ,  $h_s$ ,  $l$  et  $g$ . Pour  $l = h_s = 1m$ , tracer la courbe  $Q(h)$ .
4. Déterminer la valeur maximale  $Q_{\max}$  de  $Q$  et la hauteur critique  $h_c$  correspondante.
5. Montrer que pour une valeur de débit inférieure à  $Q_{\max}$ , il existe 2 valeurs possibles  $h_1$  et  $h_2$  de la hauteur  $h$  avec  $h_1 < h_c < h_2$ .
6. Des perturbations de la surface libre peuvent se propager à la vitesse  $\sqrt{gh}$  par rapport à l'eau. Ces perturbations peuvent-elles remonter vers l'amont ?

**Exercice 67.** Considérons un canal de section rectangulaire de largeur  $l = 70m$  et dont le lit a une pente  $I$ . L'écoulement est uniforme de débit  $Q$  et la rugosité du lit est décrite par la relation de Manning–Strickler dont le coefficient est noté  $\mathcal{K}_s$ .

1. Donner l'unité du coefficient de Manning–Strickler. Justifier.
2. Calculer la hauteur critique et la hauteur normale.
3. Déterminer le type de régime.
4. Calculer la contrainte de frottement et la pression au fond. Conclure.
  - AN avec  $I = 5cm \cdot km^{-1}$ ,  $l = 70m$ ,  $Q = 15m^3s^{-1}$  et  $\mathcal{K}_s = 58S.I.$ .

**Exercice 68.** On définit la section la plus avantageuse d'un canal comme la section transportant un débit (maximal) connu avec le périmètre mouillé minimal. Cette section permet de minimiser le coût de revêtement des canaux. Nous considérons un écoulement uniforme dans un canal rectangulaire de largeur  $b$  et de profondeur  $h$  non fixées. Le rayon hydraulique est noté  $R_h$ .

1. Montrer que la section la plus avantageuse vérifie  $R_h = h/2$ .
2. Calculer la pente d'un canal rectangulaire pour un débit maximal  $Q_{\max}$  à la vitesse moyenne  $v_{\text{moy}}$  en utilisant la formule de Chézy.
  - AN avec  $Q_{\max} = 11m^3 \cdot s^{-1}$ ,  $v_{\text{moy}} = 1.8m \cdot s^{-1}$  et  $C = 66S.I.$

**Exercice 69.** Nous proposons d'étudier un écoulement à surface libre régi par les équations suivantes

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hv}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad g \sin(\alpha) = \frac{C_f v |v|}{2 h},$$

où  $h$  est la hauteur de la surface libre,  $v$  la vitesse de l'écoulement,  $\alpha$  la pente du sol et  $C_f$  le coefficient de frottement. On suppose que  $(h_n, v_n)$  est une solution constante du modèle et l'on s'intéresse aux solutions de la forme

$$h(x, t) = h_n + \tilde{h}(x, t) \quad \text{et} \quad v(x, t) = v_n + \tilde{v}(x, t),$$

avec  $\tilde{h} \ll h_n$  et  $\tilde{v} \ll v_n$ .

1. Ecrire les équations linéarisées vérifiées par  $\tilde{h}$  et  $\tilde{v}$  en supposant  $v_n > 0$ .
2. Calculer le rapport  $\tilde{v}/v_n$  en fonction du rapport  $\tilde{h}/h_n$ .
3. En déduire que l'on peut éliminer  $\tilde{v}$  pour ne conserver qu'une seule équation en  $\tilde{h}$ .
4. Soit la condition initiale  $h(x, 0) = h_n + \tilde{h}_1(1 - \tanh(kx))$ .  
Montrer que l'on doit choisir la condition en vitesse sous la forme

$$v(x, 0) = \kappa h_n^{1/2} + \frac{1}{2} \kappa h_n^{-1/2} \tilde{h}_1(1 - \tanh(kx))$$

avec  $\kappa$  dépendant de  $C_f$ ,  $\alpha$  et  $g$ .

5. En déduire la solution  $h(x, t)$  issue de ces conditions initiales.
6. Quelle est la vitesse de propagation du profil initial?  
Ce profil initial se déforme t'il au cours du temps?

*Indication : la fonction  $u(x, t) = u_0(x - ct)$  est la solution du système*

$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

**Exercice 70.** Nous souhaitons étudier un mascaret qui est un phénomène de surélévation de l'eau d'un fleuve provoquée par l'onde de la marée montante lors des grandes marées. Considérons pour cela un canal à fond plat de section rectangulaire de largeur  $L$  supposée grande devant la profondeur. La hauteur initiale à marée basse (*i.e.* à l'amont du mascaret) est  $h_0$  et le débit est  $Q$ . La hauteur et la vitesse de l'écoulement à l'aval du mascaret sont notées  $h_1$  et  $v_1$ . La vitesse du mascaret est notée  $w$ . La dynamique du mascaret est régie par les deux relations de saut suivantes

$$\llbracket h(v-w) \rrbracket = 0 \quad \text{et} \quad \llbracket hv(v-w) + \frac{1}{2}gh^2 \rrbracket = 0,$$

où  $\llbracket f \rrbracket$  désigne la discontinuité de  $f$  entre les valeurs à droite et à gauche du mascaret.

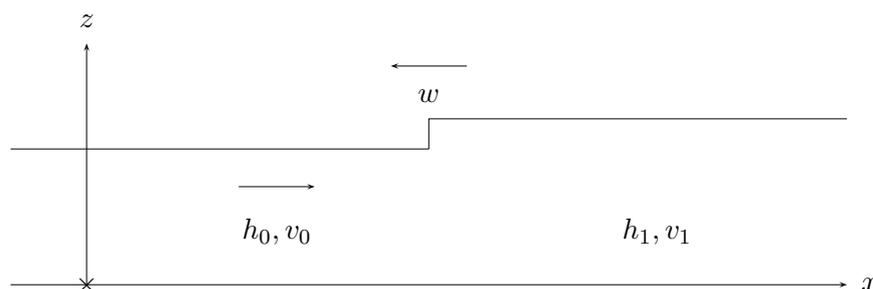


FIGURE 6.1 – Schéma d'un mascaret remontant une rivière.

1. L'écoulement est-il fluvial ou torrentiel ? Justifier
2. Quel principe de conservation traduit la première relation de saut ? la deuxième ?
3. Développer les deux relations de sauts.
4. Montrer l'égalité  $\frac{q_w^2}{h_0} + \frac{1}{2}gh_0^2 = \frac{q_w^2}{h_1} + \frac{1}{2}gh_1^2$ .

L'expression du débit linéique  $q_w$  dans le repère mobile lié au mascaret sera précisé.

5. Calculer  $q_w$ .
6. Choisir  $h_1$  parmi  $60\text{cm}$ ,  $70\text{cm}$  ou  $80\text{cm}$ . Justifier
7. En déduire  $v_1$ .
  - AN avec  $L = 50\text{m}$ ,  $h_0 = 40\text{cm}$ ,  $Q = 10\text{m}^3/\text{s}$ ,  $w = -2.5\text{m}/\text{s}$ .